

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 16, HEFT 5, MÄRZ 1933

## *Über den Impulssatz der Hydrodynamik für bewegte Gefäßwände und die Berechnung der Reaktionskräfte der Flüssigkeit*

*Von Wilhelm Müller*

(Mit 5 Figuren)

### 1. Einleitung

Es ist bekannt, daß die Impulssätze neben den Energiesätzen die wichtigste Grundlage für die meisten technisch-hydraulischen Problemstellungen bilden, namentlich für die Theorie der von Flüssigkeitskräften angetriebenen Maschinen. Für die vollständige Erfassung der maßgebenden begrifflichen Voraussetzungen, sowie für die strenge Abgrenzung aller Möglichkeiten ihrer Anwendungen, genügt es nicht, die Sätze ohne weiteres von der Dynamik starrer Körper zu übernehmen. Das ergibt sich schon aus der bemerkenswerten Wandlung, die der Massenbegriff in der Hydraulik erfährt, ferner aber aus dem Auftreten zweier grundverschiedener Bestandteile des allgemeinen bei der Bewegung von Flüssigkeiten einzuführenden Impulses, von denen nur der eine Teil, nämlich die in einem Bewegungsgebiet enthaltene Impulsmenge bzw. deren zeitliche Änderung unmittelbar nach Analogie mit der Bewegungsgröße eines Systems starrer Körper gebildet werden kann, während der *Impulsfluß* ein in der gewöhnlichen Dynamik nicht direkt vorgebildeter Begriff ist, dessen Einführung strenggenommen nur der Gauss'sche Integralsatz zu vermitteln vermag. Eine besondere Sorgfalt verdient die Behandlung des Falles, daß die Gefäßwände oder die natürlichen starren Grenzen der Flüssigkeit wie bei den Turbinen sich bewegen, also z. B. eine Drehung um eine Achse ausführen. Es scheint mir am folgerichtigsten zu sein, wenn man bei der Berechnung der Reaktionskräfte, die als Hauptaufgabe zu betrachten ist, von der auf die bewegten Wände bezogenen Relativbewegung der Flüssigkeit ausgeht und berücksichtigt, daß diese Relativbewegung nur dann den grundlegenden (Euler- bzw. Stokes-Navierschen) Differentialgleichungen, aus denen schließlich alle Energie- und Impulssätze herzuleiten sind, genügt, wenn die Beschleunigung durch gewisse Zusatzglieder ergänzt wird.

Um für mehrere Anwendungsgebiete eine strengere Grundlage zu schaffen, wollen wir uns die Aufgabe stellen, nach diesem Gesichtspunkt eine möglichst allgemein gehaltene Ableitung des Impulssatzes unter der Annahme einer beliebigen translatorischen und rotatorischen Bewegung der Gefäßwände zu geben und daraus die wichtigsten Formeln aus der Turbinen-, Tragflügel- und Propellertheorie zu deduzieren. Die Untersuchung soll insbesondere so weit geführt werden, daß auch noch der aerodynamisch interessante Fall einer nach außen unbegrenzten Strömung um einen bewegten Körper, insbesondere um einen unendlich langen Zylinder von beliebigem Querschnitt Berücksichtigung findet und eine bemerkenswerte zuerst von Cisotti angegebene Formel für den Vektor der auf die Zylinderkontur ausgeübten Kraft als eine unmittelbare Folgerung aus dem Impulssatz aufgezeigt werden kann.

## 2. Die Differentialgleichung der Relativbewegung

Für die Relativbeschleunigung haben wir mit der üblichen Bezeichnung folgende Vektordarstellung<sup>1)</sup>

$$(1) \quad \mathbf{b}_r = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Mit der bekannten Umrechnungsformel

$$(a) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} (\mathbf{v} \mathbf{v}) - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

geht (1) über in

$$(1a) \quad \mathbf{b}_r = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v},$$

wo  $\mathbf{v} \mathbf{v}$  das dyadische Produkt der Geschwindigkeit mit sich selbst bedeutet, das durch die drei Komponentenvektoren

$$v_i v_x + v_i v_y + v_i v_z \quad (i = x, y, z)$$

bestimmt ist. Wenn ferner  $\mathbf{v}_0$  den Vektor der translatorischen Geschwindigkeit,  $\bar{\omega}$  den Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Drehung,  $\mathbf{r}$  den von einem Punkt der Drehachse nach dem Aufpunkt gehenden Ortsvektor bezeichnet, so können wir die Zusatzbeschleunigungen (die Führungs- und Coriolisbeschleunigung) in der Form darstellen

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{b}_f = \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}), \\ \mathbf{b}_c = 2 \bar{\omega} \times \mathbf{v}. \end{cases}$$

1) Betreffs der Bezeichnung der Vektoroperationen, vgl. M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig 1928.

Bei Einführung der eingepägten Kraft  $\mathbf{f}$  pro Masseneinheit und Berücksichtigung der durch den Koeffizienten  $\mu$  oder die Zähigkeitszahl  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  bestimmten Reibung lautet daher die Differentialgleichung der Relativbewegung

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} &= \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \times \mathbf{r} \right. \\ &\quad \left. + \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) + 2 \bar{\omega} \times \mathbf{v} \right]. \end{aligned} \right.$$

Zur weiteren Behandlung dieser Gleichung denken wir uns die gegebenen (beweglichen) Wände  $G$  durch sogenannte Hilfs- oder Kontrollflächen  $H$  ergänzt, die so gewählt sein mögen, daß die Gesamtbegrenzung ( $G + H$ ) des von Flüssigkeit erfüllten Raumgebietes  $T$  geschlossen ist (Fig. 1). Dieses Raumgebiet wird dann einfach oder mehrfach zusammenhängend sein oder sich aus einfach oder mehrfach zusammenhängenden Teilgebieten zusammensetzen. Eine naheliegende, für den Fall der Rotation zweckmäßige Annahme, die wir im folgenden machen werden, würde dann die sein, daß die Kontrollflächen durch zwei oder mehrere zur Drehachse koaxiale Rotationsflächen, also z. B. durch Zylinderflächen dargestellt sind. Eine besondere Bedeutung hat ferner der für Laufräder von Turbinen und Zentrifugalpumpen zutreffende Fall der kreissymmetrischen Anordnung der Wände oder Schaufeln, auf den wir im Laufe der Entwicklung mehrfach zurückkommen werden.

Wir erhalten nun im allgemein die Impulsgleichung dadurch, daß wir die Differentialgleichung (3) gliedweise über das gesamte Flüssigkeitsgebiet  $T$  integrieren. Dabei zeigt sich, daß ein Teil der auftretenden Raumintegrale nach dem verallgemeinerten, für skalare, vektorielle und dyadische Funktionen gültigen Gauss'schen Integralsatz in Integrale längs der geschlossenen Begrenzung umgewandelt werden kann. Insbesondere erhalten wir durch Integration der links stehenden

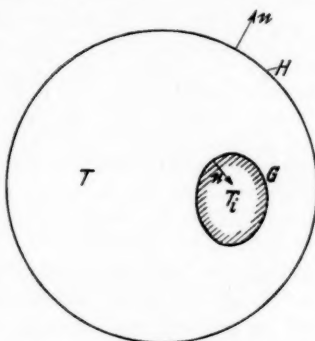


Fig. 1. Orientierungsskizze

Glieder die Summe der eingepprägten Massenkraften und der inneren, auf die Berandung wirkenden Druck- und Reibungskraften. Wenn  $\mathbf{n}$  den Einheitsvektor in Richtung der in bezug auf  $T$  äußeren Normalen in einem Punkt der Grenzfläche, ferner  $\mathbf{n}_i$  den entgegengesetzten Einheitsvektor in Richtung der inneren Normalen bedeutet, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_T \rho \mathbf{f} d\tau &= \mathfrak{R}; \quad \int_T \nabla p d\tau = \int_F p \mathbf{n} df = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_G + \mathfrak{P}_H \\ \mu \int_T \Delta \mathbf{v} d\tau &= \mu \int_T \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}) d\tau = \mu \int_F \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df \\ &= -\mu \int_F \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i df = -\mathfrak{R}. \end{aligned} \right.$$

Die von der Flüssigkeit auf die Begrenzung ausgeübten Druckkräfte setzen sich naturgemäß aus zwei Resultierenden  $\mathfrak{P}_G$  und  $\mathfrak{P}_H$  zusammen, der den Wänden zugehörigen Druckreaktionskraft  $\mathfrak{P}_G$  und der Kraft  $\mathfrak{P}_H$ , die sich auf die Kontrollflächen bezieht. Die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte sind diesen Reaktionskräften gleich und entgegengesetzt gerichtet. Wenn wir ferner kleine Reibung voraussetzen, also annehmen, daß die Reibung nur an den Wänden, wo die Geschwindigkeit mit steilem Gefälle auf den Wert Null sinkt, von merklicher Größenordnung ist, so sieht man, daß die Resultierende der gesamten, von der Flüssigkeit ausgehenden und an den Wänden angreifenden Reaktionskräfte durch die Größe

$$\mathfrak{P}_G + \mathfrak{R}_G$$

dargestellt werden kann.

### 3. Der Impulssatz für ruhende Wände

Setzt man nun zunächst  $\mathbf{v}_0 = \bar{\omega} = 0$ , so gewinnt man auf der rechten Seite von (3) zwei Integralausdrücke. Die Integration des ersten Bestandteiles der Relativbeschleunigung (d. h. der lokalen Geschwindigkeitsänderung) ergibt

$$(5) \quad \int_T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_T \rho \mathbf{v} d\tau = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

Das ist nichts anderes wie die zeitliche Änderung der in dem Gebiet  $T$  enthaltenen gerichteten Impulsgröße  $\mathfrak{Z}$ , wobei wir unter dem elementaren Impulsvektor das Produkt aus dem Massenelement und dem Vektor seiner (mittleren) Geschwindigkeit zu verstehen haben. Das Integral des zweiten Beschleu-



nigungsgliedes läßt sich, da der Integrand die Form einer Divergenz besitzt, wieder durch ein Flächenintegral darstellen. Man erhält

$$(6) \quad \varrho \int \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} d\tau = \int_H \mathbf{v} (\varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df) = \int_H \mathbf{v} (\varrho v_n df) = \mathfrak{F}.$$

Da das Integral längs der begrenzenden Wände wegen  $v_n = 0$  verschwindet und  $\mathbf{v} df = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df$  die durch das Kontrollflächenelement  $df$  in der Zeiteinheit hindurchtretende Flüssigkeitsmenge bezeichnet, so hat das Integral die Bedeutung der sog. *konvektiven* Änderung des Impulses, d. h. des Unterschiedes des durch die Kontrollflächen aus dem Raumgebiet  $T$  in der Zeiteinheit austretenden und des eintretenden resultierenden Impulsvektors. Der damit für den Fall ruhender Wände abgeleitete Impulssatz<sup>1)</sup> würde daher dahin auszusprechen sein, daß die auf die Flüssigkeit wirkende Gesamtkraft gleich ist der Summe aus der lokalen und konvektiven Änderung des Impulses. Die entsprechende Gleichung lautet

$$(7) \quad \mathfrak{R} + (-\mathfrak{P}_G - \mathfrak{P}_H - \mathfrak{R}) = \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} + \mathfrak{F}.$$

Die an den Wänden angreifende Reaktionskraft berechnet sich daraus in der Form

$$(7a) \quad \mathfrak{P}_G + \mathfrak{R}_G = \mathfrak{R} - \mathfrak{P}_H - \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} - \mathfrak{F}.$$

Wenn die Wände (Schaufeln) kreissymmetrisch angeordnet sind, die Kontrollflächen kreiszylindrische Form haben und außerdem ebene Verhältnisse vorausgesetzt werden, so verschwindet die Resultierende  $\mathfrak{P}_H$  der Drucke längs der Hilfsflächen. Allgemein können die Druckkräfte längs dieser Flächen mit Hilfe der Energiegleichung eliminiert, d. h. auf die Geschwindigkeiten zurückgeführt werden.

#### 4. Berechnung der Drehmomente für ruhende Wände

Um die Lage der resultierenden Kraft zu bestimmen, müssen wir dem eben dargelegten Satz einen analogen auf die Momente bezüglichen Impulssatz zur Seite stellen. Man erhält diesen Satz dadurch, daß man die einzelnen Glieder

1) Vgl. M. Lagally, Handbuch der Physik (herausgegeben von H. Geiger u. K. Scheel), Bd. VII, Berlin 1927, S. 22; L. Prandtl u. O. Tietjens, Hydro- und Aeromechanik, I. Bd., Berlin 1929, S. 217f.; Wilhelm Müller, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig 1932, S. 24f.

der Gl. (3) mit dem von einem beliebig gelegenen Anfangspunkt aus gezählten Ortsvektor  $\mathbf{r}$  vektoriell multipliziert und über das Raumgebiet integriert. Diese Multiplikation mit  $\mathbf{r}$  kann man auch an den vektoriellen Integranden der mit den ursprünglichen Integralen gleichwertigen Flächenintegralen der 1. Impulsgleichung vornehmen. Für die direkte Umwandlung der Raumintegrale gelten folgende allgemeine Formeln, die wir wegen ihrer Bedeutung für die spätere Entwicklung schon hier zur Sprache bringen wollen.

Sei  $\varphi$  eine skalare Funktion und  $\mathbf{a}$  ein Vektor, so hat man<sup>1)</sup>

$$(b) \quad \int_V \mathbf{a} \times \mathbf{n} df = - \int_T \text{rot}(\mathbf{a} \varphi) d\boldsymbol{\tau},$$

wobei

$$(c) \quad \text{rot } \mathbf{a} \varphi = \varphi \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla \varphi$$

zu setzen ist. Daraus folgt z. B. für  $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ ,  $\varphi = p$

$$\int_T \mathbf{r} \times \nabla p d\boldsymbol{\tau} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{n} df p.$$

Benutzt man ferner den auf dyadische Produkte  $\mathbf{b} \mathbf{a}$  erweiterten Gaußschen Integralsatz<sup>1)</sup>

$$(d) \quad \int_V (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} df) \mathbf{a} = \int_V \mathbf{n} df \cdot \mathbf{b} \mathbf{a} = \int_T (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b}) d\boldsymbol{\tau},$$

ferner die Vektorbeziehung

$$(e) \quad \mathbf{c} \cdot \nabla (\mathbf{b} \times \mathbf{e}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{e}) - \mathbf{e} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{b}) \text{ mit } \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{c}$$

und setzt  $\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{v}$  in der Formel (d);  $\mathbf{c} = \mathbf{e} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{r}$  in der Formel (e), so kommt die Gleichung

$$\int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = \int_T \mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} d\boldsymbol{\tau} = \int_T \mathbf{r} \times \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} d\boldsymbol{\tau}.$$

Im ganzen ergeben sich durch Summierung der Drehmomente folgende Ausdrücke

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_T \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} d\boldsymbol{\tau} &= \mathfrak{M}(\mathfrak{F}); \quad \int_T \mathbf{r} \times \nabla p d\boldsymbol{\tau} = \int_V \mathbf{r} \times p \mathbf{n} df = \mathfrak{M}(\mathfrak{P}), \\ \mu \int_T \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{v} d\boldsymbol{\tau} &= \mu \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{n} df \cdot \nabla \mathbf{v} = -\mathfrak{M}(\mathfrak{R}). \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, Stuttgart 1916, S. 372, 77b. Die Bezeichnungen bei Spielrein weichen von den hier angegebenen etwas ab.

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_V \mathbf{r} \times \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\tau &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} d\tau = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \\ \int_V \mathbf{r} \times \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} d\tau &= \rho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = \mathfrak{M}. \end{aligned} \right.$$

Daraus resultiert dann die Momentengleichung

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}(\mathfrak{N}) + [-\mathfrak{M}(\mathfrak{P}) - \mathfrak{M}(\mathfrak{R})] &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} d\tau \\ &+ \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \mathfrak{M}, \end{aligned} \right.$$

die zum Ausdruck bringt, daß das Moment der auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte gleich ist der substantiellen Änderung des Impulsmomentes, die sich wieder aus der lokalen und der konvektiven Änderung zusammensetzt. Daraus ist dann das Moment der Wandreaktionskraft zu ermitteln. Dabei wird in besonderen Fällen, z. B. wenn die Kontrollflächen koaxiale Zylinderflächen sind und ebene Strömungsverhältnisse vorausgesetzt werden, das Moment der Druckkräfte längs dieser Hilfsflächen in bezug auf jeden Punkt der Achse einen verschwindenden Beitrag liefern.

### 5. Zusammenhang mit der Energiegleichung

Bevor wir die Impulsgleichung mit Rücksicht auf die Bewegung der Wände vervollständigen, wollen wir zum Zweck späteren Gebrauchs Gelegenheit nehmen, kurz auf die Beziehung zur Energiegleichung hinzuweisen, die bekanntlich im Gegensatz zur Impulsgleichung ein skalares Integral der Bewegungsgleichung darstellt.

Zur Herleitung setzen wir in dem Ausdruck (1) für  $\mathbf{b}$ ,

$$(f) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{1}{2} v^2 - 2 \mathbf{v} \times \mathbf{w},$$

wo  $\mathbf{w}$  die Wirbelstärke oder die innere Rotation der Flüssigkeit ( $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ ) bedeutet und erhalten dann bei Vernachlässigung der Reibung

$$(3a) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \mathbf{f} - \nabla p &= \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) + \nabla \frac{1}{2} v^2 \right. \\ &\left. + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) - 2 \mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \bar{\omega}) \right]. \end{aligned} \right.$$

Wir können zunächst die absolute Geschwindigkeit

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0 + \bar{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$$

eingeführen und damit die drei als partielle Ableitungen nach der Zeit dargestellten Beschleunigungsausdrücke zusammenfassen. Wenn ferner die Absolutströmung wirbelfrei ist, so besitzt die Relativströmung wegen

$$\text{rot } \mathbf{u} = 2 \bar{\omega}$$

die konstante Wirbelstärke  $\mathbf{w} = -\bar{\omega}$ . Setzen wir weiter:

$$(g) \quad \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) = \bar{\omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \nabla u^2,$$

und führen das Potential der äußeren Kräfte ein mit  $\mathbf{f} = -\nabla \Omega$ , so erhalten wir die Gleichung:

$$(11) \quad \nabla \left[ \varrho \Omega + p + \frac{1}{2} \varrho (v^2 - u^2) \right] + \varrho \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = 0,$$

die bei Einführung des Geschwindigkeitspotentials  $\Phi$  unmittelbar zur Energie- oder Druckrelation

$$(11a) \quad \varrho \Omega + p + \frac{1}{2} \varrho (v^2 - u^2) + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{const}$$

führt. Die Beziehung kann zur Berechnung der auf die Hilfsflächen ausgeübten Druckkräfte verwendet werden.

#### 6. Entwicklung der Impulsgleichung für den Fall der Bewegung in reibungsloser Flüssigkeit

Für die weitere Behandlung der Impulsbeziehung gehen wir auf die Gl. (3) zurück und betrachten insbesondere den auf der rechten Seite in der Klammer stehenden Ausdruck für die absolute Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a &= \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 + (\bar{\omega} \times \mathbf{r})] + \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) + 2 \bar{\omega} \times \mathbf{v} \\ &= \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) + 2 \bar{\omega} \times \mathbf{v}, \end{aligned}$$

in dem jetzt die relative und absolute Geschwindigkeit gesondert auftreten und außerdem zwei Zusatzglieder, deren Einfluß auf die Kraftwirkung näher bestimmt werden muß. Sehen wir von den eingepprägten und den Reibungskräften ab, so ergibt sich durch Integration der Gleichung über das von den Wänden  $G$  und den Hilfsflächen  $H$  eingeschlossene Raumgebiet  $T$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_G + \mathfrak{P}_H &= - \int_T \varrho \mathbf{b}_a d\tau = - \frac{\partial}{\partial t} \int_T \varrho \mathbf{c} d\tau - \varrho \int_H \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df) \\ &\quad - \varrho \bar{\omega} \times \int_T (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) d\tau - 2 \varrho \bar{\omega} \times \int_T \mathbf{v} d\tau \\ &= - \frac{\partial \mathfrak{I}_a}{\partial t} - \mathfrak{I}_r' + \mathfrak{I} + \mathfrak{C}. \end{aligned} \right.$$

Die ersten Glieder rechts stimmen formal mit den für ruhende Gefäße festgestellten Bestandteilen der Impulsänderung überein. Für die Summe der Zentrifugal- und Corioliskraft erhält man dagegen

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{C} = -\varrho \bar{\omega} \times \int_T (u + 2v) d\tau = -\varrho \bar{\omega} \times \int_T (c - v_0 + v) d\tau.$$

Da sich ferner der Vektor der relativen Geschwindigkeit  $v$  als Divergenz der Dyade  $v r$  darstellen läßt, wie man ohne weiteres feststellt, so ergibt sich folgende einfache Umformung des Ausdrucks für das relative Impulsintegral

$$\varrho \int_T v d\tau = \varrho \int_T \nabla \cdot v r d\tau = \varrho \int_H r (v \cdot n df).$$

Schreiben wir wieder  $u$  statt  $\bar{\omega} \times r$ , also

$$\varrho \bar{\omega} \times \int_T v d\tau = \varrho \int_H (\bar{\omega} \times r) (v \cdot n df) = \varrho \int_H u (v \cdot n df)$$

und beachten, daß

$$\int v_0 (v \cdot n df) = v_0 \int \text{div } v d\tau = 0$$

wird, so geht die Gleichung für die Reaktionskraft über in

$$(12a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_G &= -\mathfrak{P}_H - \frac{\partial}{\partial t} \int_T \varrho c d\tau \\ &\quad - \varrho \bar{\omega} \times \int_T (c - v_0) d\tau - \varrho \int_H c (v \cdot n df). \end{aligned} \right.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Kontrollflächen Rotationsflächen sind mit  $\bar{\omega}$  als Achse, können wir statt  $v$  im letzten Integral auch  $c - v_0$  setzen. Führt man ferner die Potentialfunktionen  $\Phi$  und  $\Phi'$  ein durch die Beziehungen

$$\nabla \Phi = c; \quad \nabla (\Phi - v_0 \cdot r) = \nabla \Phi' = c - v_0,$$

so läßt sich (12a) auch in der Form schreiben:

$$(12b) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_G &= -\mathfrak{P}_H - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega} \times \right) \int_T \varrho \Phi n df \\ &\quad + \varrho \bar{\omega} \times \int_T v_0 d\tau - \varrho \int_H \nabla \Phi (\nabla \Phi' \cdot n df). \end{aligned} \right.$$

Wir werden später Gelegenheit nehmen, auf diese Formel zurückzukommen und die Besprechung verschiedener technisch wichtiger Spezialfälle daran anzuschließen.

## 7. Umformung des Ausdrucks für das Reaktionsmoment

Wir gehen von folgender Darstellung des Momentes der von der Flüssigkeit auf die Grenzflächen ( $G + H$ ) ausgeübten Druckkräfte aus:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}_G + \mathfrak{M}_H &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_T \mathbf{r} \times \rho \mathbf{c} d\tau - \rho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df \\ &\quad - \rho \int_T \mathbf{r} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{u}) d\tau - \rho \int_T \mathbf{r} \times (2 \bar{\omega} \times \mathbf{v}) d\tau \\ &= - \frac{\partial \mathfrak{M}_a}{\partial t} - \mathfrak{M}_r' + \mathfrak{M}(\mathfrak{F}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{G}) \end{aligned} \right.$$

und haben uns zunächst mit der Umgestaltung der letzten beiden, auf die Zentripetal- und Coriolisbeschleunigung sich beziehenden Integrale zu beschäftigen. Zu diesem Zweck gehen wir von dem allgemeinen, unter (d) angegebenen Gauss'schen Integralsatz für dyadische Funktionen aus und setzen  $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ . Dann ergibt sich mit (e) und

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} = \bar{\omega} \times \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{a}$$

die Beziehung

$$\rho \int_F (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = \rho \int_T \mathbf{r} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{v}) d\tau + \rho \int_T \mathbf{v} \times \mathbf{u} d\tau.$$

Benutzen wir ferner die Formel

$$(h) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0,$$

so kommt

$$\bar{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \bar{\omega}) + \mathbf{v} \times \mathbf{u} = 0,$$

$$\bar{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \mathbf{r} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{u}),$$

also

$$\rho \int_F (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = \rho \int_T 2 \mathbf{r} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{v}) d\tau - \rho \bar{\omega} \times \int_T \mathbf{r} \times \mathbf{v} d\tau$$

und daher

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{G}) = - 2 \rho \int_T \mathbf{r} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{v}) d\tau - \rho \int_T \mathbf{r} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{u}) d\tau$$

oder

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{G}) = - \rho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df - \rho \int_T \bar{\omega} \times [\mathbf{r} \times (\mathbf{c} - \mathbf{v}_0)] d\tau.$$

Es entsteht also folgende Endformel für das Moment der reaktiven Flüssigkeitskräfte:

$$(13a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}_G + \mathfrak{M}_H &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_T \mathbf{r} \times \rho \mathbf{c} d\tau - \bar{\omega} \times \int_T \mathbf{r} \times \rho \mathbf{c} d\tau \\ &+ \rho \int_T \bar{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) d\tau - \rho \int_H \mathbf{r} \times (\mathbf{c} - \mathbf{v}_0) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df), \end{aligned} \right.$$

die bei Einführung der Potentialfunktionen in

$$(13b) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}_G + \mathfrak{M}_H &= - \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega} \times \right) \int_F \mathbf{r} \times \mathbf{n} df \Phi \\ &- \rho \int_H (\mathbf{r} \times \nabla \Phi) (\nabla \Phi \cdot \mathbf{n} df) + \rho \int_T \bar{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) d\tau \end{aligned} \right.$$

übergeht.

Die weitere Ausgestaltung dieser und der Formel (12), insbesondere die Elimination der Druckkräfte längs der Hilfsflächen bei unbegrenzter Ausdehnung der Flüssigkeit, wollen wir uns vorbehalten, vorläufig aber nur den Fall der reinen Drehung der Schaufeln ins Auge fassen und den Zusammenhang mit der Eulerschen Turbinenformel herstellen.

#### 8. Reaktionswirkung bei reiner Drehung der Gefäßwände

Wenn  $\mathbf{v}_0 = 0$  ist, so ergeben sich, wenn man  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} df$  setzt, die speziellen Formeln

$$(12c) \quad \mathfrak{P}_G = - \mathfrak{P}_H - \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega} \times \right) \int_T \mathbf{c} d\tau - \rho \int_H \mathbf{c} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} df),$$

$$(13c) \quad \mathfrak{M}_G = - \mathfrak{M}_H - \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega} \times \right) \int_T \mathbf{r} \times \mathbf{c} d\tau - \rho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} df.$$

Wenn wir voraussetzen, daß die Schaufeln eines Turbinenlaufrades dreh-symmetrisch um die Achse herum angeordnet sind, so wird die resultierende Reaktionskraft jedenfalls in die Richtung der Achse fallen. Wichtig ist vor allem die Bestimmung des Drehmomentes der Kraft in bezug auf die Achse. Man sieht zunächst aus der Formel (13), daß das zweite Glied in dem Momentenausdruck einen Vektor senkrecht zur Hauptachse darstellt. Führen wir also die Projektionen  $\mathbf{r}'$  und  $\mathbf{v}'$  (bzw.  $\mathbf{c}'$ ) des Orts- und Geschwindigkeitsvektors auf die  $xy$ -Ebene ein, so haben wir, da das Moment der Druckkräfte längs der Hilfsflächen verschwindet, für die axiale Momentenkomponente der Wandreaktion

$$M_z = - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_T \mathbf{r}' \times \mathbf{c}' d\tau - \rho \int_H (\mathbf{r}' \times \mathbf{c}') \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} df.$$



Formal dieselbe Gleichung resultiert für den ebenen Fall; nur sind hier natürlich die Striche wegzulassen. Es wird

$$(14) \quad M_z = - \frac{\partial}{\partial t} \int_T \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{c} d\tau - \varrho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} df.$$

Ist die Strömung außerdem stationär, so verschwindet der erste Ausdruck und es entsteht dann die bekannte verallgemeinerte Eulersche Turbinenformel

$$(14a) \quad M = - \varrho \int_H \mathbf{r} \times \mathbf{c} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} df).$$

Durch Benutzung der Vektorrelation

$$(i) \quad \mathbf{b} \times [\mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

kann man, da  $\mathbf{r} \times \mathbf{n} df = 0$  ist, diesem Ausdruck auch die Form geben:

$$(14b) \quad M = - \varrho \int_H \mathbf{r} \times [\mathbf{c} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{n} df)].$$

Wenn wir als Kontrollflächen zwei das Turbinenrad begrenzende Zylinderflächen haben mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$ ,

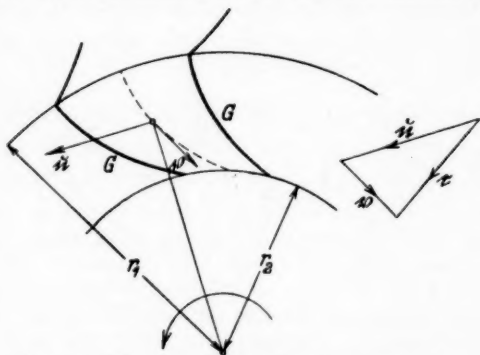


Fig. 2. Bewegung der Flüssigkeit im Laufrad einer Radialturbine

(Fig. 2), so erhalten wir unter der Annahme unendlich vieler und unendlich dünner Schaufeln oder gleichmäßig verteilter Geschwindigkeit über den Umfang des Rades und mit Einführung der mittleren, in der Zeiteinheit durch das Laufrad hindurchfließenden Wassermenge  $Q$  die vereinfachte Formel

$$(14c) \quad M = \varrho Q [c_{u_1} r_1 - c_{u_2} r_2],$$

in der  $c_u$  und  $c_w$  die Umfangskomponenten der (mittleren) Absolutgeschwindigkeit beim Eintritt in das Laufrad und beim Austritt aus dem Rade bedeuten.

### 9. Berechnung der Wandreaktion für den Fall der unbegrenzten Flüssigkeit

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, die den Kontrollflächen zugeordnete Druckkraft  $\mathfrak{P}_H$  bzw. das Moment  $\mathfrak{M}_H$  mit Hilfe der Energiegleichung für den Grenzfall zu eliminieren, daß die als Kugel zu denkende Kontrollfläche ins Unendliche rückt, und damit einen vollständigen Ausdruck für die Wandreaktion zu entwickeln.<sup>1)</sup> Dabei wird es gleichzeitig darauf ankommen, die auftretenden Integrale so umzugestalten, daß der Zusammenhang mit den bekannten speziellen Formeln, z. B. der Joukowskyschen Formel, für den Auftrieb eines Tragflügels oder der entsprechenden Beziehung für Zugkraft und widerstehendes Moment eines Propellers deutlich zutage tritt.

Um den Druck längs der Fläche  $H$  zu ermitteln, benutzen wir die in Abschn. 5 aufgestellten Gleichungen:

$$\nabla p = -\frac{1}{2} \rho \nabla (v^2 - u^2) - \rho \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$p = \text{const} - \frac{1}{2} \rho [c^2 + v_0^2 - 2c \cdot v_0 - 2c \cdot u - 2v_0 \cdot u] - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Wenn wir dann voraussetzen, daß das Potential  $\Phi$  wie der reziproke Wert des Radiusvektors  $r$  im Unendlichen abnimmt, also die Absolutgeschwindigkeit  $c$  wie das reziproke Quadrat von  $r$ , so können wir alle über  $H$  erstreckten Integrale, die  $c$  quadratisch enthalten, vernachlässigen. Da ferner

$$\int_H v_0^2 n df = v_0^2 \int n df = 0$$

wird, so ergibt sich folgender Ausdruck für die Druckkraft

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_H &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_H \Phi n df + \rho \int_H (c \cdot v_0) n df \\ &+ \rho \int_H (c \cdot u) n df - \rho \int_H (v_0 \cdot u) n df. \end{aligned} \right.$$

Ferner erhalten wir durch einfache Entwicklungen des durch die Kontrollflächen gehenden Impulsflusses mit Hilfe der früher gegebenen Beziehungen

1) Vgl. M. Lagally, Z. a. M. M. 2. S. 409—422. 1922.

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \int_H \varrho c [(c - v_0) \cdot n df] = - \varrho v_0 \times \int_H c \times n df \\ &- \varrho \int_H (c \cdot v_0) n df = - (\mathfrak{A}_1)_H - \varrho \int_H (c \cdot v_0) n df. \end{aligned} \right.$$

Führen wir neben  $\mathfrak{A}_1$  noch das weitere Integral

$$\mathfrak{A}_2 = \varrho \int_H u \times (c \times n df) = \varrho \int_H c (u \cdot n df) - \varrho \int_H (c \cdot u) n df$$

ein und berücksichtigen, daß  $u \cdot n df = 0$  zu setzen ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \varrho \bar{\omega} \times \int_T v_0 d\tau - \mathfrak{Z} - \mathfrak{P}_H &= \varrho \int_H (v_0 + u) \times (c \times n df) \\ &+ \varrho \int_H (v_0 \cdot u) n df + \varrho \bar{\omega} \times \int_T v_0 d\tau. \end{aligned}$$

Nun hat man nach der allgemeinen Formel für das Flächenintegral einer Skalarfunktion

$$(j) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_F (a \cdot b) n df &= \int_T \nabla (a \cdot b) d\tau \\ &= \int_T (a \cdot \nabla b + b \cdot \nabla a + a \times \text{rot } b + b \times \text{rot } a) d\tau. \end{aligned} \right.$$

Daher wird mit  $\text{rot } u = 2\bar{\omega}$ ;  $a \cdot \nabla u = \bar{\omega} \times a$

$$(17) \quad \bar{\omega} \times \int_T v_0 d\tau = - \int_{G+H} (v_0 \cdot u) n df,$$

also

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &- \mathfrak{Z} - \mathfrak{P}_H + \varrho \bar{\omega} \times \int_T v_0 d\tau \\ &= \varrho \int_H (v_0 + u) \times (c \times n df) - \int_G (v_0 \cdot u) n df. \end{aligned} \right.$$

Der Vektor  $c \times n df$  kann als gerichtetes Element der Flächenzirkulation<sup>1)</sup> aufgefaßt werden und man erkennt, daß der gesamte, einer geschlossenen Fläche zugeordnete Zirkulationsvektor gemäß der allgemeinen Formel (b)

$$(19) \quad v_0 \times \int_F c \times n df = - v_0 \times \int_T \text{rot } c d\tau$$

1) M. Pascal, *Circuitazione superficiale*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, nota Ia, Vol. 29. S. 353–356. 1920; nota IIa, Vol. 30. S. 117 bis 119. 1921; nota IIIa, S. 249–251; ferner *Giornale di Mat. di Battaglini* Milano, Vol. 59. 1921.

durch die im Raumgebiet  $T$  enthaltenen Wirbel bestimmt ist. Wenn das von  $G$  und  $H$  eingeschlossene Gebiet wirbelfrei ist, wenn also angenommen wird, daß die Zirkulation von einer Wirbelbelegung des Schaufelrandes erzeugt wird, so haben wir

$$(19a) \quad \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{A}_1)_{H+G} &= v_0 \times \int_{H+G} c \times n df \\ &= v_0 \times \int_H c \times n df + v_0 \times \int_G c \times n df = 0. \end{aligned} \right.$$

Für das über eine beliebige geschlossene Begrenzung erstreckte Integral  $\mathfrak{A}_2$  erhalten wir

$$(\mathfrak{A}_2)_F = \varrho \int_F c (u \cdot n df) - \varrho \int_F (u \cdot c) n df.$$

Wenden wir auf das erste Integral die Formel (d), auf das zweite die Formel (j) an, so ergibt sich die Beziehung

$$(20) \quad (\mathfrak{A}_2)_F = \varrho \int_F u \times (c \times n df) = -\varrho \int_T u \times \text{rot } c d\tau + \varrho \bar{\omega} \times \int_T c d\tau.$$

Bei Wirbelfreiheit im Gebiet  $T$  hat man

$$(20a) \quad (\mathfrak{A}_2)_F = \varrho \bar{\omega} \times \int_T c d\tau = \varrho \bar{\omega} \times \int_F \Phi n df.$$

Setzt man nun die gefundenen Ausdrücke (19) und (20) in die Impulsgleichung (12) ein, so entsteht folgende neue Beziehung für die Reaktionskraft

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_G &= \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_{T_i} c d\tau - \varrho \int_G (v_0 + u) \times (c \times n df) \\ &\quad - \varrho \int_G (v_0 \cdot u) n df. \end{aligned} \right.$$

Hier ist zu bemerken, daß wir die in  $T$  als wirbel- und quellfrei vorausgesetzte Strömung der Flüssigkeit in das von den bewegten Schaufeln eingeschlossene Gebiet  $T_i$  analytisch fortgesetzt denken und dann die Beziehung

$$-\int_{T_i} c d\tau = \int_G \tau (c \cdot n df) + \int_{T_i} \tau \text{div } c d\tau$$

ansetzen können, in der der letzte Ausdruck verschwindet, wenn unter den in  $T_i$  oder auf  $G$  gelegenen „erzeugenden“

Singularitäten keine Quellen vorkommen. Das letzte Glied des Ausdrucks (21), das nach (17) auch in der Form

$$-(\mathbf{v}_0 \times \bar{\omega}) \varrho \int_{T_i} d\tau$$

geschrieben werden kann, d. h. als äußeres Produkt der Vektoren  $\mathbf{v}_0$  und  $\bar{\omega}$  mit der von den Schaufeln verdrängten Flüssigkeitsmasse, verschwindet in dem vor allem technisch wichtigen Fall, daß die Fortbewegung in die Richtung der Drehachse fällt. Dann geht der Ausdruck für  $\mathfrak{P}_G$  über in

$$(21a) \quad \mathfrak{P}_G = -\frac{\partial}{\partial t} \int_G \varrho \Phi n df - \varrho \int_G (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) \times (\mathbf{c} \times n df).$$

Man erhält hier das bekannte Resultat in allgemeiner Form, daß die Reaktionskraft bei der gleichförmigen Bewegung

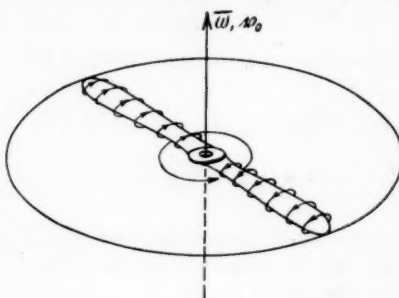


Fig. 3. Propeller mit Zirkulation

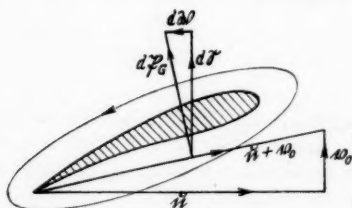


Fig. 4. Strömungsgeschwindigkeit und Kräfte an einem Propellerelement

jeden Flügel sich ausbildende Zirkulationsverteilung einem im wesentlichen radial gerichteten Zirkulationsvektor entsprechen. Wenn wir durch zwei benachbarte koaxiale Kreiszylinder (von

in einer reibungslosen Flüssigkeit im wesentlichen durch die Zirkulation um die bewegte Wandfläche zustande kommt. Wenn ferner  $\omega = 0$  ist, so nimmt die Formel eine Gestalt an, die die unmittelbare Verwandtschaft mit der bekannten, dem ebenen Fall angepaßten Kutta-Joukowskyschen Formel erkennen läßt. Nehmen wir ferner an, daß die rotierenden und fortbewegten Wände aus radial gestellten, äquidistant auf einem Kreis senkrecht zur Drehachse angeordneten Schraubenflügeln eines Propellers bestehen (Fig. 3), so wird die um

W. M.

den L  
erha  
gezei  
Führ  
zirku  
Form  
Zirku  
Bede

(22)

darge  
rühre  
stehe

10. D

so er  
schni

(23)

wobei

gesetz  
über  
denke  
von (2

(k)

(l)

Dann

Wend  
und (d

Ann

den Radien  $r$  und  $r + dr$  ein Flügелеlement herausschneiden, so erhalten wir bei der Übertragung auf die Ebene etwa das neben-gezeichnete Bild (Fig. 4), das die ungefähre Richtung der Führungsgeschwindigkeiten  $u = r\omega$  und  $v_0$  in bezug auf das zirkulatorisch umströmte Flügelprofil erkennen läßt. Die Formeln zeigen, daß die Drehung in Verbindung mit der Zirkulation eine axialgerichtete *Magnuskraft* erzeugt, die die Bedeutung einer Zugkraft hat und durch die Formel

$$(22) \quad \mathfrak{S} = -\varrho \int_G u \times (c \times n df)$$

dargestellt werden kann, während die von der Translation her-rührende Magnuskraft tangential gerichtet ist und ein wider-stehendes Moment ergibt.

#### 10. Das Moment der Wandreaktion in unbegrenzter Flüssigkeit

Bezeichnen wir das Moment des Impulsflusses wieder mit  $\mathfrak{M}$ , so erhalten wir durch eine Umformung, die der im vorigen Ab-schnitt für  $\mathfrak{F}$  gegebenen völlig analog ist,

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \varrho \int_H r \times (c - v_0) [(c - v_0) \cdot n df] \\ &= -(\mathfrak{B}_1)_H - \varrho \int_H (r \times v_0) v \cdot n df - \varrho \int_H (r \times n df) c \cdot v_0 \\ &\quad + \varrho \int_H (r \times c) c \cdot n df, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\int r \times [v_0 \times (c \times n df)] = \mathfrak{B}_1$$

gesetzt ist und der Index  $H$  bedeuten soll, daß die Integration über die als Kugel mit unbegrenzt wachsendem Radius zu denkende Hilfsfläche erstreckt werden soll. Zur Umformung von (23) benutzen wir die Formeln

$$(k) \quad a \times (b \times c) = b(c \cdot a) - c(a \cdot b);$$

$$(l) \quad a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b).$$

Dann ergibt sich

$$\mathfrak{B}_1 = \varrho \int v_0 [(r \times c) \cdot n df] - \varrho \int (c \times n df) r v_0.$$

Wendet man weiter auf diese Flächenintegrale die Beziehungen (b) und (d) an und berücksichtigt

$$\operatorname{div} (r \times c) = -r \cdot \operatorname{rot} c,$$

so erhält man für irgendeine geschlossene Begrenzung

$$(24) \quad (\mathfrak{B}_1)_F = -\varrho \int_T \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 \times \text{rot } \mathbf{c}) d\mathbf{r} + \varrho \mathbf{v}_0 \times \int_T \mathbf{c} d\mathbf{r},$$

also bei Wirbelfreiheit in dem von  $G$  und  $H$  eingeschlossenen Gebiet

$$(24a) \quad (\mathfrak{B}_1)_{G+H} = +\varrho \mathbf{v}_0 \times \int_T \mathbf{c} d\mathbf{r} = +\varrho \mathbf{v}_0 \times \int_{H+G} \Phi \mathbf{n} df.$$

Führt man ferner das weitere Integral  $\mathfrak{B}_2$  ein, das sich von  $\mathfrak{B}_1$  nur dadurch unterscheidet, daß  $\mathbf{v}_0$  durch  $\mathbf{u} = \bar{\omega} \times \mathbf{r}$  ersetzt ist, so erhält man in entsprechender Weise aus

$$\mathfrak{B}_2 = \varrho \int \mathbf{r} \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{n} df)] = \varrho \int \mathbf{u} [(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} df]$$

mit Hilfe des verallgemeinerten Gauss'schen Integralsatzes die Gleichung

$$(25) \quad (\mathfrak{B}_2)_F = -\varrho \int_T \mathbf{r} \times (\mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{c}) d\mathbf{r} + \varrho \int_T \bar{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{c}) d\mathbf{r},$$

also bei Wirbelfreiheit im Gebiet  $T$

$$(25a) \quad (\mathfrak{B}_2)_{H+G} = \varrho \bar{\omega} \times \int_T \mathbf{r} \times \mathbf{c} d\mathbf{r} = \varrho \bar{\omega} \times \int_{H+G} \mathbf{r} \times \mathbf{n} df \Phi.$$

Wenn wir jetzt noch den Ausdruck für das Moment der auf  $H$  wirkenden Druckkräfte berücksichtigen,

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} -\mathfrak{M}_H &= -\varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_H \mathbf{r} \times \mathbf{n} df \Phi - \varrho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{n} df) \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_0 \\ &\quad - \varrho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{n} df) \mathbf{c} \cdot \mathbf{u} + \varrho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{n} df) (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u}), \end{aligned} \right.$$

so ergibt sich aus (13) mit (23), (24), (25) und (26) für das Moment der Reaktionskräfte

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_G &= (\mathfrak{B}_1)_H + (\mathfrak{B}_2)_H - (\mathfrak{B}_1)_{H+G} - (\mathfrak{B}_2)_{H+G} \\ &\quad + \varrho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df + \varrho \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{n} df) (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u}) \\ &\quad + \varrho \int_T \mathbf{v}_0 \times \mathbf{c} d\mathbf{r} + \varrho \int_T \bar{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Die letzten vier Integrale lassen sich mit Hilfe der Formeln (b) und (h) in folgender Weise zusammenfassen. Man hat



$$\begin{aligned}
 & \int \mathbf{v}_0 \times \mathbf{c} d\tau + \int \bar{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) d\tau \\
 &= \mathbf{v}_0 \times \int \mathbf{u} d\tau + \mathbf{v}_0 \times \int \mathbf{v} d\tau + \bar{\omega} \times \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 d\tau \\
 &= \mathbf{v}_0 \times \int \bar{\omega} \times \mathbf{r} d\tau + \int \bar{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) d\tau + \mathbf{v}_0 \times \int \mathbf{v} d\tau \\
 &= \int \mathbf{r} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{v}_0) d\tau + \mathbf{v}_0 \times \int \mathbf{v} d\tau.
 \end{aligned}$$

Da ferner nach den wiederholt benutzten Grundformeln

$$\begin{aligned}
 & \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = -\mathbf{v}_0 \times \int_T \mathbf{v} d\tau \\
 & \int_H (\mathbf{r} \times \mathbf{n} df) \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u} = -\int_{T+T_1} \mathbf{r} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{v}_0) d\tau
 \end{aligned}$$

wird, so erhält man folgenden endgültigen Ausdruck für  $\mathfrak{M}_G$ :

$$\mathfrak{M}_G = -\varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_G \mathbf{r} \times \mathbf{n} df \Phi - \varrho \int_G \mathbf{r} \times [(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{n} df)] - \varrho \int_G (\mathbf{r} \times \mathbf{n} df) \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u},$$

wobei das erste Glied wieder geschrieben werden kann

$$\int_{T_1} \mathbf{r} \times \mathbf{c} d\tau = -\int_G \mathbf{r} [(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} df] + \int_{T_1} \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{c}) d\tau$$

bzw. bei Einführung der Potentialfunktion  $\Phi$

$$\int_{T_1} \mathbf{r} \times \mathbf{c} d\tau = -\int_G \mathbf{r} \times \mathbf{n} df \Phi.$$

Für den Fall des gleichförmig rotierenden Propellers

$$\left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = 0, \mathbf{v}_0 \times \bar{\omega} = 0, \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u} = 0 \right)$$

haben wir z. B. als widerstehendes Moment in bezug auf die Drehachse

$$\mathfrak{M} = -\varrho \int_G \mathbf{r} \times [\mathbf{v}_0 \times (\mathbf{c} \times \mathbf{n} df)].$$

# 11. Reaktionswirkung bei reiner Drehung, insbesondere im ebenen Fall

Wenn wir nun weiter reine Drehung und Zirkulationsfreiheit voraussetzen, so geht der unter (21) gegebene Ausdruck für die Reaktionskraft über in

$$\mathfrak{P}_G = -\varrho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega} \times \right) \int_G \Phi \mathbf{n} df,$$

während das Reaktionsmoment der analog gebauten Gleichung

$$(31) \quad \mathfrak{M}_G = -\varrho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega} \times \right) \int_G \mathbf{r} \times \mathbf{n} df \Phi$$

entspricht. Es ergibt sich daraus das bemerkenswerte Resultat, daß bei stationärer Bewegung der Momentenvektor senkrecht zur Drehachse steht, also im ebenen Fall ( $\mathbf{r} \cdot \bar{\omega} = 0$ ) verschwindet.

Um namentlich für diesen letzteren Fall einige besondere Folgerungen zu entwickeln, nehmen wir etwa an, daß ein unendlich langer Zylinder mit beliebig geschlossener Begrenzung in der im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit um eine parallel zu den Erzeugenden gerichtete Achse rotieren möge. Bei gleichförmiger Drehung haben wir für die auf den Zylinder wirkende Kraft:

$$(32) \quad \mathfrak{P} = -\bar{\omega} \times \varrho \int_G \Phi \mathbf{n} df = -\varrho \int_G \Phi (\bar{\omega} \times \mathbf{n} df).$$

Wenn  $\mathbf{n}$  für die geschlossene Kontur  $G$  als innere Normale vorausgesetzt wird und der Umlaufsinn bei der Integration so festgelegt wird, daß die eingeschlossene Fläche zur Linken liegt, so ist mit

$$n_x = \cos(n x); \quad n_y = \cos(n y)$$

zu setzen:

$$df = ds; \quad dx = ds \cos(n y); \quad dy = -ds \cos(n x);$$

also hat man:

$$P_x = \varrho \omega \int_G \Phi ds \cos(n y) = \omega \varrho \int_G \Phi dx,$$

$$P_y = -\varrho \omega \int_G \Phi ds \cos(n x) = \omega \varrho \int_G \Phi dy,$$

Für den komplexen Vektor der Kraft erhalten wir also mit  $dz = dx + i dy$ :

$$(33) \quad P_x + i P_y = \omega \varrho \int \Phi dz.$$

Führen wir zur Vereinfachung der Rechnung das komplexe Potential  $\chi = \Phi + i \Psi$  ein, ferner die Stromfunktion  $\Psi'$  der Relativströmung, so ist

$$\Psi' = \Psi + \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2).$$

Da nun  $\Psi'$  längs der Kontur  $G$  konstant ist, so haben wir

$$\int_G \Psi' dz = 0.$$

Da außerdem, wie man sofort sieht, das über die Kontur  $G$  erstreckte Integral  $\int (x^2 + y^2) dz$  verschwindet, so folgt

$$\int_G \Psi dz = 0.$$

Man kann daher den komplexen Kraftvektor auch durch das komplexe Integral

$$(34) \quad P_x + i P_y = \rho \omega \int_G (\Phi + i \Psi) dz = \rho \omega \int_G \chi dz$$

darstellen, das bei gegebenem  $\chi$  unmittelbar nach dem Cauchy-schen Residuensatz ausgewertet werden kann und bereits von Cisotti<sup>1)</sup> angegeben wurde. Bei ungleichförmiger Drehung tritt noch die Kraft

$$(35) \quad \mathfrak{P}' = - \frac{\partial}{\partial t} \int_G \Phi n df$$

hinzu, die offenbar senkrecht zu  $\mathfrak{P}$  gerichtet ist in dem Sinne, daß die Vektoren  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{P}'$ ,  $\bar{\omega}$  ein Rechtssystem bilden. Man erhält dann wie oben:

$$(35a) \quad P'_x + i P'_y = - i \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_G \chi dz.$$

Während das Moment der Kraft  $\mathfrak{P}$  verschwindet, ergibt sich für die Kraft  $\mathfrak{P}'$ :

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}' = - \frac{\partial}{\partial t} \int_G \mathbf{r} \times n df \rho \Phi \\ \text{oder} \\ M = - \frac{\partial}{\partial t} \int_G \Phi [x \cos(ny) - y \cos(nx)] ds \\ \qquad \qquad \qquad = - \frac{\partial}{\partial t} \int_G \Phi (x dx + y dy). \end{array} \right.$$

Bei Einführung von komplexen Größen kann man schreiben:

$$(36a) \quad M' = - \Re \frac{\partial}{\partial t} \int_G \chi(z) \bar{z} dz = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_G (\chi z d\bar{z} + \bar{\chi} \bar{z} dz).$$

1) U. Cisotti, Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito, Atti del R. Istit Veneto II. Teil. 69. S. 442. 1909—1910; vgl. ferner U. Cisotti, Sopra la translazione uniforme di un solido in un liquido indefinito, Annali di mat. pura ed appl. Ser. III. 19. S. 106. 1912.

### 12. Anwendung auf das Problem der Rotation einer unendlich langen Platte in einer unbegrenzten Flüssigkeit

Nehmen wir an, daß der Mittelpunkt der Spur der Platte von der Breite  $2a$  auf der  $x$ -Achse im Abstand  $s$  vom Nullpunkt liegt und bezeichnen wir den Neigungswinkel (Anstellwinkel) gegen diese Achse mit  $\alpha$  (Fig. 5), so läßt sich mittels der Relation:

$$(37) \quad z = s + \frac{a}{2} e^{i\alpha} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

das Gebiet der  $z$ -Ebene außerhalb der Plattenspur auf das Außengebiet des Einheitskreises  $K$ ,  $|\zeta| = 1$  in der  $\zeta$ -Ebene konform abbilden.<sup>1)</sup> In der Koordinate  $\zeta$  dieser Ebene lautet

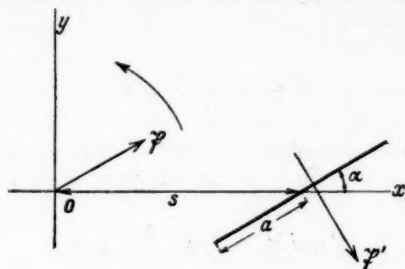


Fig. 5. Druckwirkung bei der Rotation einer ebenen Platte in der Flüssigkeit

dann das komplexe Potential für die Absolutströmung in der Umgebung der um den Anfangspunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Platte:

$$(38) \quad \chi = -i\omega a \left( \frac{s \cos \alpha}{\zeta} + \frac{a}{4\zeta^2} \right).$$

Man erhält dann ohne Schwierigkeit:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_G \chi dz &= \int_K \chi \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \\ &= -\frac{i\omega a^2}{2} e^{i\alpha} \int_K \left( \frac{s \cos \alpha}{\zeta} + \frac{a}{4\zeta^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) d\zeta \\ &= \pi a^2 \omega s \cos \alpha e^{i\alpha} \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. B. Caldonazzo, Über die gleichförmige Rotation eines festen Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit, Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik (herg. von v. Kármán & L. Civita), Berlin 1924, S. 175–185; Wilhelm Müller, Mathematische Strömungslehre, Berlin 1928, S. 219–224.

und daraus

$$(40) \quad \begin{cases} P_x + i P_y = \pi \rho a^2 \omega^2 s \cos \alpha e^{i\alpha}, \\ P'_x + i P'_y = -i \pi \rho a^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} s \cos \alpha \cdot e^{i\alpha}. \end{cases}$$

Die Kraft  $\mathfrak{P}$ , deren Absolutwert dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  proportional ist, geht durch den Drehpunkt und ist zur Plattenspur parallel gerichtet, derart, daß sie die Platte von der Drehachse nach außen zu drängen sucht. Sie ist gleichbedeutend einer in die Spur fallenden Parallelkraft und einem Drehmoment, das den Anstellwinkel zu verkleinern, also die Platte in die radiale Stellung zu drehen bestrebt ist.

Für die Berechnung der Lage der senkrecht zur Plattenspur gerichteten Kraft  $\mathfrak{P}'$  haben wir das Integral:

$$\int_G \chi(z) \cdot \bar{z} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = -\frac{i \omega a^3}{2} e^{i\alpha} \int_G \left( \frac{s \cos \alpha}{\zeta} + \frac{a}{4 \zeta^2} \right) \cdot \left[ s + \frac{a}{2} e^{-i\alpha} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right] \left( 1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) d\zeta$$

auszuwerten und den Realteil zu ermitteln. Man erhält dann ohne Schwierigkeit

$$(41) \quad M = -\rho \pi a^2 \left( \frac{a^2}{8} + s^2 \cos^2 \alpha \right) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t},$$

also für den Hebelarm der Kraft  $\mathfrak{P}'$  in bezug auf 0:

$$(42) \quad h = s \cos \alpha + \frac{a^2}{8 s \cos \alpha},$$

und daher für den Abstand  $h$  der Kraft vom Mittelpunkt der Platte

$$(43) \quad h_0 = \frac{a^2}{8 s \cos \alpha}.$$

Bei beschleunigter Drehung wirkt das Moment im Sinne einer Verkleinerung des Anstellwinkels, bei verzögerter Drehung im entgegengesetzten Sinne.

Wenn die Platte um den Anfangspunkt eine Schwingung in der Flüssigkeit unter dem Einfluß der Schwerkraft ausführt, so ist das von der Beschleunigung herrührende Drehmoment gleichwertig mit einer Vergrößerung des Trägheitsmomentes.

**Zusammenfassung**

In der vorliegenden Arbeit werden einige allgemeine, in Vektorschreibweise dargestellte Ausdrücke für die aus dem Impulssatz gewonnenen Reaktionskräfte gegeben, die von einer Flüssigkeit auf die selbst translatorisch und rotatorisch bewegten Wände ausgeübt werden. Im Laufe der rechnerischen Umgestaltung tritt der Zusammenhang mit einigen bekannten, in der Technik viel gebrauchten Formeln (z. B. der Joukowsky-schen für Tragflügel und Propeller und der Eulerschen Turbinenformel) hervor. Insbesondere wird der Fall der Bewegung in einer unbegrenzten idealen Flüssigkeit eingehend durchgerechnet und eine spezielle Anwendung der Formeln auf die Bestimmung der Kräfte an einer rotierenden, unendlich langen Platte gegeben.

Prag, Institut für Mechanik an der Deutschen Technischen Hochschule.

(Eingegangen 14. Dezember 1932)

## Über die Grenzschicht verdünnter Elektrolyte und das Diffusionspotential

Von Shu-Tsu Chang<sup>1)</sup>

(Mit 2 Figuren)

### Einleitung

Auf Grund der Nernst-Planckschen<sup>2)3)</sup> Theorie, welche für das lokale Potentialgefälle im stromlosen Zustand für einwertige Elektrolyte ergibt:

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{dx} = - \frac{RT}{\varepsilon} \frac{1}{U+V} \frac{d}{dx} (U - V),$$

ist man imstande, die Potentialdifferenz eines beliebigen, ungleichmäßig konzentrierten Elektrolyten zu berechnen.

Hier bedeutet  $R$  die absolute Gaskonstante,  $T$  die absolute Temperatur,  $\varepsilon$  die Ladung eines Grammions (elektromagnetisch gemessen),  $\varphi$  das Potential und  $U$  und  $V$  die Summen:

$$U = u'c' + u''c'' + u'''c''' + \dots,$$

$$V = v'\bar{c}' + v''\bar{c}'' + v'''\bar{c}''' + \dots,$$

wobei  $u'$ ,  $u''$ ... bzw.  $c'$ ,  $c''$ ... die Beweglichkeiten bzw. die Konzentrationen (in Molen pro Kubikzentimeter) der Kationen,  $v'$ ,  $v''$ ... bzw.  $\bar{c}'$ ,  $\bar{c}''$ ... die entsprechenden Größen der Anionen bezeichnen.

Diese Theorie versagt aber in dem Falle, wo zwei Lösungen verschiedener Konzentration sich berühren, denn hier ist das Konzentrationsgefälle durchaus Null, während die Konzentrationen selber einen Sprung erfahren. Man versucht, die Unstetigkeitsfläche zu ersetzen durch eine Übergangsschicht von kleiner aber endlicher Dicke  $\delta$ . Die Konzentrationen werden dann durchaus stetig sich ändern, während das Konzentrationsgefälle innerhalb der Schicht sehr große Werte annimmt. Aber je nach der Art, wie man die Beschaffenheit der Grenzschicht, d. h. die Abhängigkeit der Konzentrationen von der laufenden Koordinate  $x$  annimmt, erhält man verschiedene Lösungen der Differentialgleichung.

1) Berliner Dissertation.

2) W. Nernst, *Ztschr. f. phys. Chem.* 2. S. 613. 1888.

3) M. Planck, *Wied. Ann.* 39. S. 161. 1890.



Planck<sup>1)</sup> geht von einer unendlich scharfen Grenze aus und betrachtet die Übergangsschicht als durch Diffusion aufgebaut. Seine Formel ist ursprünglich vom kinetischen Standpunkt aus für einwertige Elektrolyte abgeleitet. Einen allgemeinen Fall mehrwertiger Ionen hat sowohl K. R. Johnson<sup>2)</sup> als auch V. Plettig<sup>3)</sup> durchgerechnet unter der Annahme, daß alle positiven Ionen die Wertigkeit  $p$  und alle negativen die Wertigkeit  $q$  besitzen. Die Formel lautet:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{U_2 e^{p k (\varphi_2 - \varphi_1)} - U_1}{V_2 - V_1 e^{q k (\varphi_2 - \varphi_1)}} &= \frac{q}{p} \frac{\ln \frac{c_2}{c_1} - q k (\varphi_2 - \varphi_1)}{\ln \frac{c_2}{c_1} + p k (\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ \frac{\frac{c_2}{c_1} e^{p k (\varphi_2 - \varphi_1)} - 1}{\frac{c_2}{c_1} - e^{q k (\varphi_2 - \varphi_1)}} &= \end{aligned} \right.$$

wobei zur Abkürzung  $k = \frac{\varepsilon}{RT}$  gesetzt wird und die Indizes 1 und 2 sich auf die beiden Lösungen beziehen.

Für den Spezialfall eines ein-einwertigen Elektrolyten,  $p = q = 1$ , stimmt diese mit der Planckschen Gleichung:

$$E_P = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{RT}{\varepsilon} \ln \xi,$$

$$(2a) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi \frac{U_2 - U_1}{V_2 - \xi V_1} &= \frac{\ln \frac{c_2}{c_1} - \ln \xi}{\ln \frac{c_2}{c_1} + \ln \xi} \cdot \frac{\xi c_2 - c_1}{c_2 - \xi c_1} \end{aligned} \right.$$

überein, wobei  $E_P$  die nach Planck berechnete Potentialdifferenz bedeutet.

Dagegen nimmt Henderson<sup>4)</sup>, an, daß die Lösung an irgendeiner Stelle innerhalb der Grenzschicht sich additiv aus dem Bruchteil  $\alpha$  der Lösung 2 und dem Bruchteil  $1 - \alpha$  der Lösung 1 zusammensetzt. Er macht die willkürliche Annahme, daß  $\alpha$  von  $x$  linear abhängig ist. Seine auf thermodynamischem Wege für den allgemeinen Fall abgeleitete Formel lautet:

$$(3) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{RT}{\varepsilon} \frac{(U_1' - V_1') - (U_2' - V_2')}{(U_1'' - V_1'') + (U_2'' - V_2'')} \ln \frac{U_1'' + V_1''}{U_2'' + V_2''}.$$

1) M. Planck, Wied. Ann. 40. S. 561. 1890.

2) K. R. Johnson, Ann. d. Phys. 14. S. 995. 1904.

3) V. Plettig, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 735. 1930.

4) P. Henderson, Ztschr. f. phys. Chem. 59. S. 118. 1907.

Hierbei bedeutet:

$$U' = w' c' u' + w'' c'' u'' + \dots \text{ usw.},$$

$$U'' = w'^2 c' u' + w''^2 c'' u'' + \dots \text{ usw.},$$

$w$  = Wertigkeit der einzelnen Ionensorte.

Für einen ein-einwertigen Elektrolyten erhält man

$$(3a) E_H = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{RT}{\varepsilon} \frac{(U_1 - V_1) - (U_2 - V_2)}{(U_1 - V_1) + (U_2 - V_2)} \ln \frac{U_1 + V_1}{U_2 + V_2}.$$

$E_H$  bedeutet die nach Henderson berechnete Potentialdifferenz.

Die Messungen von P. F. Büchi<sup>1)</sup> und von V. Plettig<sup>2)</sup> haben ergeben, daß sich der Hendersonsche Wert des Potentials einstellt, kurz nachdem man die Lösungen sorgfältig übereinandergeschichtet hat. Dem Vorschlag Plancks in seiner Arbeit über die „Grenzschrift verdünnter Elektrolyte“<sup>3)</sup> folgend, habe ich auf Anregung von Prof. Nernst Versuche angestellt, bei denen die Potentialdifferenz der Grenzschrift während mehrerer Tage messend verfolgt wurde, wobei Störungen der Grenzschrift, die durch Wärmeströmungen oder mechanische Erschütterungen bewirkt werden, nach Möglichkeit ausgeschaltet wurden. Die folgenden Versuche haben die Plancksche Theorie bestätigen können.

### Theorie

Nehmen wir mit K. R. Johnson im allgemeinen Falle an, daß ein Elektrolyt nur eine Sorte positiver und negativer Ionen enthält, und daß alle positiven bzw. negativen Ionen die gleiche Wertigkeit  $p$  bzw.  $q$  besitzen. Unter Benutzung der Bedingung, daß im Leiter keine freie Elektrizität bestehen kann, erhält man aus den Gleichungen der Kontinuität die folgenden Beziehungen:

$$(4) \begin{cases} \frac{\partial c^{v'}}{\partial t} = u^{v'} R T \frac{\partial^2 c^{v'}}{\partial x^2} + u^{v'} p \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( c^{v'} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \bar{c}^{v'}}{\partial t} = v^{v'} R T \frac{\partial^2 \bar{c}^{v'}}{\partial x^2} - v^{v'} q \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( c^{v'} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0. \end{cases}$$

Zuerst ist die zeitliche wie die örtliche Änderung in der Übergangsschicht sehr groß. Sobald der quasistationäre Zustand eintritt, der dadurch bedingt ist, daß die osmotischen Kräfte

1) P. F. Büchi, Ztschr. f. Elektrochem. 30. S. 443. 1924.

2) V. Plettig, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 735. 1930.

3) M. Planck, Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. S. 367. 1930.

mit den elektrischen sich gegenseitig aufheben, kann man die zeitliche Änderung der örtlichen gegenüber vernachlässigen, also die Ausdrücke gleich Null setzen.

Hieraus berechnet man die einzelnen Ionenkonzentrationen in der Grenzschicht:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} c' &= \frac{c - c_2 \left( \frac{c}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}}}{c_1 - c_2 \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}}} c_1, \\ c'' &= \frac{c_1 \left( \frac{c}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}} - c \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}}}{c_1 - c_2 \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}}} c_2, \\ \bar{c}' &= \frac{c - \bar{c}_2 \left( \frac{c}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}}}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2 \left( \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}}} \bar{c}_1, \\ \bar{c}'' &= \frac{\bar{c}_1 \left( \frac{c}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}} - c \left( \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}}}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2 \left( \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}}} \bar{c}_2, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$r = \frac{\ln \left( \frac{c_2}{c_1} \right)}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{\ln \left( \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \right)}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

und

$$k = \frac{e}{RT}.$$

Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Lösungen 1 und 2 nur eine Sorte positiver und negativer Ionen enthalten, und ferner an den beiden Endflächen der Schicht

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0, \quad c' &= c = c_1, \quad c'' = 0, \\ x = \delta, \quad c' &= 0, \quad c'' = c = c_2, \end{aligned}$$

wo  $c_1$  und  $c_2$  die Konzentrationen der Lösungen 1 und 2 bedeuten.

An irgendeiner Stelle  $x$  der Grenzschicht ändert sich nach Planck die Gesamtkonzentration linear mit der laufenden Koordinate  $x$ :

$$(6) \quad c = c_1 - \frac{x}{\delta} (c_1 - c_2).$$

Dagegen setzt Henderson offenbar willkürlich jede einzelne Ionenkonzentration in allgemeiner Form einfach:

$$(7) \quad c' = c_1' - \frac{x}{\delta} (c_1' - c_2').$$

In diesem Fall erhält man an Stelle von Gl. (5):

$$(7a) \quad \begin{cases} c' = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} c_1, \\ c'' = \frac{c_1 - c}{c_1 - c_2} c_2, \\ \bar{c}' = \frac{c - \bar{c}_2}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2} \bar{c}_1, \\ \bar{c}'' = \frac{\bar{c}_1 - c}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2} \bar{c}_2. \end{cases}$$

Wenn man, wie Planck<sup>1)</sup>, als „Ionengehalt“ der Schicht den Mittelwert definiert:

$$g = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} c \, dx,$$

so ergeben sich in Erweiterung der von Planck angegebenen Formel für den „stationären Zustand“ aus (5) und (6) die Ionengehalte:

$$(8) \quad \begin{cases} g' = \frac{c_1}{c_1 - c_2 \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}}} \left( \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{c_1 \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}} - c_2}{c_1 - c_2} \cdot \frac{c_2}{1 - \frac{pk}{r}} \right), \\ g'' = \frac{c_2}{c_1 - c_2 \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}}} \left( \frac{c_1 \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}} - c_2}{c_1 - c_2} \cdot \frac{c_1}{1 - \frac{pk}{r}} - \frac{c_1 + c_2}{2} \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{pk}{r}} \right), \\ \bar{g}' = \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2 \left( \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}}} \left( \frac{\bar{c}_1 + \bar{c}_2}{2} - \frac{\bar{c}_1 \left( \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}} - \bar{c}_2}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2} \cdot \frac{\bar{c}_2}{1 + \frac{qk}{r}} \right), \\ \bar{g}'' = \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2 \left( \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}}} \left( \frac{\bar{c}_1 \left( \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}} - \bar{c}_2}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2} \cdot \frac{\bar{c}_1}{1 + \frac{qk}{r}} - \frac{\bar{c}_1 + \bar{c}_2}{2} \left( \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} \right)^{\frac{qk}{r}} \right), \end{cases}$$

1) M. Planck, Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. S. 367. 1930.

wobei  $g'$  und  $g''$  sich auf die Kationen  $\bar{g}'$  und  $\bar{g}''$  auf die Anionen bezieht. Für den „Mischungszustand“ ergeben sich dagegen aus (6) und (7a) die Ausdrücke:

$$(9) \quad \begin{cases} g' = \frac{c_1}{2}, & \bar{g}' = \frac{\bar{c}_1}{2}, \\ g'' = \frac{c_2}{2}, & \bar{g}'' = \frac{\bar{c}_2}{2}. \end{cases}$$

Wie man aus (5), (7a), (8), (9) erkennt, unterscheidet sich der „stationäre Zustand“ erheblich von dem „Mischungszustand“. Wenn die Nernst-Plancksche Theorie der Elektrizitätserregung in Lösungen, auf der sowohl die Plancksche als auch die Hendersonsche Formel beruht, aufrecht erhalten werden soll, so kann dieser Mischungszustand nicht von Dauer sein. Da am Anfang die Konvektionsströme nicht vermieden werden können, nimmt die Potentialdifferenz den Hendersonschen Wert an. Sofern die Störungen ausgeschaltet werden, muß der „Mischungszustand“ in den „stationären Zustand“ übergehen. Im Laufe der Zeit ändert sich der Zustand der Grenzschicht, wodurch eine Änderung der Potentialdifferenz durch den Diffusionsvorgang herbeigeführt wird. Man wird erwarten müssen, daß sich der anfängliche Wert im Laufe der Zeit dem Planckschen Wert nähert.

Im Fall  $c_1 = c_2$  stimmt der Hendersonsche Wert  $E_H$  mit dem Planckschen  $E_P$  überein. Die zeitliche Änderung der Potentialdifferenz soll dann gleich Null sein, d. h. das Potential im Laufe der Zeit konstant bleiben, womit die weiter unten aufgeführten Messungen in Übereinstimmung stehen.

Tabelle 1

Kombinationen	Ionengehalte			
	nach Planck		nach Henderson	
	positive	negative	positive	negative
1 n-HCl	$g' = 0,4709, g'' = 0,0341$	$\bar{g}' + \bar{g}'' = 0,505$	$g' = 0,5, g'' = 0,005$	$\bar{g}' + \bar{g}'' = 0,505$
$\frac{1}{100}$ n-KCl				
1 n-HCl	$g' = 0,4699, g'' = 0,0351$	$\bar{g}' + \bar{g}'' = 0,505$	$g' = 0,5, g'' = 0,005$	$\bar{g}' + \bar{g}'' = 0,505$
$\frac{1}{100}$ n-LiCl				
1 n-HCl	$g' = 0,4433, g'' = 0,1067$	$\bar{g}' + \bar{g}'' = 0,55$	$g' = 0,5, g'' = 0,05$	$\bar{g}' + \bar{g}'' = 0,55$
$\frac{1}{10}$ n-KCl				
1 n-HCl	$g' = 0,4359, g'' = 0,1141$	$\bar{g}' + \bar{g}'' = 0,55$	$g' = 0,5, g'' = 0,05$	$\bar{g}' + \bar{g}'' = 0,55$
$\frac{1}{10}$ n-LiCl				

Wie man leicht sieht, ergeben die beiden Theorien in diesem Fall dieselben Ionenkonzentrationen bzw. Ionengehalte der Grenzschrift.

In Tab. 1 sind die Ionengehalte in der Grenzschrift, nach den Formeln von Planck und von Henderson für verschiedene Konzentrationen der Elektrolyte  $c_1$  und  $c_2$  berechnet, zusammengestellt.

Aus Tab. 1 geht hervor, daß der positive Ionengehalt des Elektrolyten kleinerer Konzentration beim stationären Zustand größer als beim Mischungszustand ist. Wenn die Hendersonsche Annahme in Wirklichkeit zutrifft, müssen die Gl. (9) immer Gültigkeit besitzen. Sobald aber der Diffusionsvorgang eintritt, nimmt die Konzentration des Ions, das die größere Beweglichkeit hat, in der Übergangsschrift ab. Durch geeignete chemisch-analytische Methoden könnte man die Änderung der Ionenkonzentration in der Grenzschrift messend verfolgen.

Für die zeitliche Änderung des Diffusionspotentials hat Planck<sup>1)</sup> zunächst die folgende Gleichung:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{R^2 T^2}{3 \delta^2 \epsilon} \left( \frac{1}{S_2^3} - \frac{1}{S_1^3} \right) (D_1 - D_2) \\ &\cdot \left[ 2 (S_2 S_1^* - S_1 S_2^*) + \frac{D_1 - D_2}{S_1 - S_2} (S_2 D_1^* - S_1 D_2^*) \right] \end{aligned} \right.$$

abgeleitet unter der Annahme, die Henderson zur Ableitung des Diffusionspotentials benutzte, daß die einzelnen Ionenkonzentrationen sich mit der laufenden Koordinate  $x$  linear ändern. Hierbei gilt

$$\begin{aligned} S &= U + V, & D &= U - V, \\ S^* &= U^* + V^*, & D^* &= U^* - V^*, \end{aligned}$$

$U^*, V^*$  bezeichnen die Summe

$$\begin{aligned} U^* &= u'^2 c' + u''^2 c'' + \dots, \\ V^* &= v'^2 \bar{c}' + v''^2 \bar{c}'' + \dots \end{aligned}$$

Wenn die Hendersonsche Annahme in Wirklichkeit zutreffen würde, sollte im Falle  $c_1 = c_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  sein, da  $E_P = E_H$  sein würde. Für den speziellen Fall  $\text{HCl}|\text{KCl}$  ergibt die obige Gleichung aber einen positiven Wert. Planck hat daher diese Annahme aufgegeben und führt statt dessen die Voraussetzung ein, daß (1) die Ionenkonzentrationen linear

1) M. Planck, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. S. 113. 1931.

von einem Parameter  $\alpha$  abhängig sind, und (2) der Gesamtdruck sich zunächst ausgleicht, also

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0.$$

Dann ergibt sich für die zeitliche Änderung des Diffusionspotentials

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varrho \left[ \left( \frac{D_{21}}{S_{21}} A - B \right) \cdot J - B \left( \frac{1}{(S_2 + \lambda S_{21})^2} - \frac{1}{(S_1 + \lambda S_{21})^2} \right) \right],$$

wobei

$$\lambda = \frac{D_{21} (V_1 U_2 - U_1 V_2)}{2 U_{21} V_{21} S_{21}},$$

$$\varrho = \frac{R^2 T^2}{\varepsilon \delta^2} \left( 1 + \lambda \ln \frac{S_2}{S_1} \right)^2,$$

$$A = \lambda S_{21} (S_{21} S_{21}^* - D_{21} D_{21}^*) + D_{21} (S_2 D_{11}^* - S_1 D_{21}^*),$$

$$B = \lambda S_{21} (S_{21} D_{21}^* - D_{21} S_{21}^*) + D_{21} (S_2 S_{11}^* - S_1 S_{21}^*),$$

$$J = \int_1^2 \frac{dS}{S(S + \lambda S_{21})^2} = \left[ \frac{1}{\lambda^2 S_{21}^2} \ln \frac{S}{S + \lambda S_{21}} + \frac{2S + 3\lambda S_{21}}{2\lambda^2 S_{21}^2 (S + \lambda S_{21})^2} \right]_1^2.$$

Für  $c_1 = c_2$  ergibt sich  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  und daraus folgt

$$x = \frac{\alpha + \lambda \ln \left( 1 + \frac{S_{21}}{S_1} \alpha \right)}{1 + \lambda \ln \frac{S_2}{S_1}}.$$

Für  $c_1 \neq c_2$  ergibt die Formel z. B. auch für den Fall  $1/100$  n. KCl | 1 n. HCl, in dem der Plancksche Wert kleiner ist als der Hendersonsche, einen positiven Wert für  $\partial \varphi / \partial t$ , während man eine monotone Abnahme erwarten würde. Wie weiter unten erwähnt, scheinen jedoch auch die Messungen einen anfänglichen kleinen Anstieg des Potentials zu ergeben, doch lassen sich sichere Aussagen vorläufig noch nicht machen.

### Experimenteller Teil

#### Versuchsanordnung

Zur Messung des Potentials wurden Kalomelelektroden benutzt. Diese wurden nach einer Vorschrift von A. Findlay<sup>1)</sup> hergestellt.

1) A. Findlay, *Practical physical Chemistry*. 4th Ed. S. 200; ähnlich bei Ostwald-Luther, *Physiko-Chem. Messungen* S. 570.



Die Messung erfolgte nach der üblichen Kompensationsmethode. Als Normalelement wurde ein altes Westonelement benutzt, das mit einem guten geeichten verglichen wurde. Seine EMK. betrug 1,0173 Volt bei 17,5°. Als Nullinstrument wurde ein Siemens-Halske-Spiegelgalvanometer mit einer Empfindlichkeit von  $10^{-9}$  Amp./mm genommen. Mit Rücksicht auf den großen inneren Widerstand der Kette von etwa  $10^6$  Ohm wurde ein hochohmiges Instrument benutzt. Die folgende Skizze erläutert die Apparatur (Fig. 1):

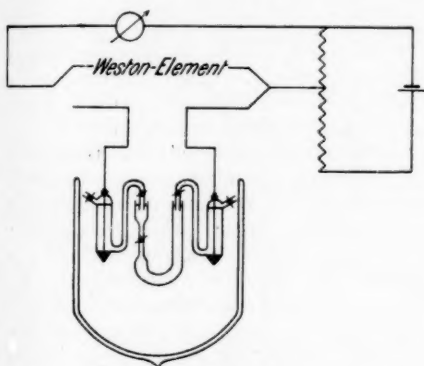


Fig. 1. Versuchsanordnung

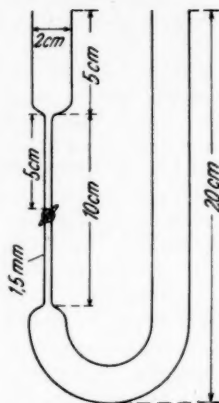


Fig. 2. Diffusionsrohr

Planck<sup>1)</sup> hat darauf aufmerksam gemacht, daß man, um die Strömungen zu vermeiden und um die Randbedingungen möglichst lange Zeit aufrecht zu erhalten, zwei große Quantitäten der beiden Elektrolyten durch eine sehr enge Röhre von der Länge  $\delta$  miteinander kommunizieren lassen muß.

An eine 1,5 mm weite Glaskapillare, in deren Mitte ein Hahn saß, wurden beiderseits 2 cm weite Glasrohre angeschmolzen. Das längere Ende des Erweiterungsrohres wurde U-förmig gebogen. Das kürzere Ansatzrohr hatte eine Länge von 5 cm. Die Kapillare selbst war 10 cm lang. Der Hahn wurde mit Hahnfett gefettet. Die gesamte Höhe des U-Rohres betrug 20 cm.

Für die Versuche wurde in den längeren Schenkel des U-Rohres solange der konzentriertere Elektrolyt eingefüllt,

1) M. Planck, Sitzungsber. d. Preuß. Ak. d. W. S. 367. 1930.  
Annalen der Physik. 5. Folge. 16.

bis die Flüssigkeit im anderen Schenkel gerade über den Hahn gestiegen war. Nun wurde der Hahn geschlossen. Mehrmals wurde die Kapillare über dem Hahn mit Watte sauber und trocken gemacht. Darauf wurde der zweite Elektrolyt, dessen Konzentration kleiner war als die des ersten, in den kürzeren Schenkel eingefüllt.

Es mußte darauf geachtet werden, daß nach dem Öffnen des Hahnes nach Möglichkeit keine Verschiebung der Berührungsfläche der Elektrolyte stattfand. Die Füllhöhe der Elektrolyte in den U-Rohrschenkeln mußte mit Rücksicht auf die verschiedene Dichte der Elektrolyte genau berechnet werden. Nachdem die beiden Elektrolyte in das U-Rohr eingefüllt waren, wurden die Enden der beiden Kalomelektroden in die U-Rohrschenkel hineingetaucht. Um das Verdampfen der Lösung zu verhindern, wurden Gummistopfen in die U-Rohrenden eingesetzt. Durch ihre Durchbohrungen wurden die Zuführungsrohre der Kalomelektroden durchgesteckt. Das ganze System wurde dann festgeklemmt und erschütterungsfrei aufgestellt. Um Temperaturdifferenzen in dem ganzen System zu vermeiden, wurde dies mit den beiden Kalomelektroden in einen Thermostaten versenkt. Der Thermostat bestand aus einem sehr großen Dewargefäß, in dem sich Wasser als Thermostatenflüssigkeit befand. Die Temperatur war innerhalb von  $0,4^{\circ}\text{C}$  konstant. Die Messung wurde erst dann begonnen, als die Kalomelektrode und das U-Rohr die Temperatur des Wassers angenommen hatten.

Es ist zu bemerken, daß das versilberte Dewargefäß an zwei diametral gegenüberliegenden Streifen frei von Versilberung war, um das U-Rohr im Thermostaten sehen und die Trennungsfläche beobachten zu können.

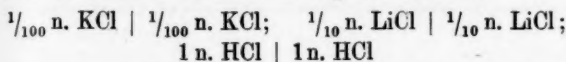
Um die Zimmertemperatur möglichst konstant zu halten, wurde ein Gasofen mit Thermoregulierung benutzt.

#### Vorversuche

Die meisten Elektrolyte haben keine Farbenionen. Wenn man beide Lösungen zusammenbringt, kann man nicht beurteilen, ob die Grenzschicht durch Druckänderung gestört wird. Zu einer der beiden Lösungen wurde Fuchsin (etwa  $0,0002$  Mol pro Liter) zur Färbung hinzugefügt. Auf den Elektrolyten soll Fuchsin keine Einwirkung ausüben. Wenn Fuchsin auf ihn einwirken würde, würde eine Ionenänderung stattfinden. Die Ionenkonzentration würde dadurch geändert werden. Demzufolge mußte eine EMK. bei einem Elemente,

das aus zwei nàmlichen Elektrolyten gleicher Konzentration besteht, auftreten.

Als Vorversuch wurden die folgenden Ketten



mit und ohne Fuchsin daraufhin geprüft, ob eine Änderung der EMK. auftritt, da die beiden ersten Elektrolyte später mit Zusatz von Fuchsin für die Untersuchung des Diffusionsvorgangs in der Grenzschrift benutzt wurden. Bei diesen Versuchen wurde eine EMK. von höchstens 0,1 Millivolt gemessen, obwohl Fuchsin in Salzsäure seine Farbe von Rot in Dunkelgelb änderte.

#### Ergebnisse der Messungen

Es wurden die Diffusionspotentiale bei folgenden Elektrolytkombinationen indirekt gemessen:

1.  $\frac{1}{100} \text{ n. KCl} \mid 1 \text{ n. HCl},$
2.  $\frac{1}{100} \text{ n. LiCl} \mid 1 \text{ n. HCl},$
3.  $\frac{1}{10} \text{ n. LiCl} \mid 1 \text{ n. HCl},$
4.  $1 \text{ n. KCl} \mid 1 \text{ n. HCl}.$

Gemessen wurde das gesamte Potential. Durch Rechnung wurde das Elektrodenpotential nach der Nernstschen Formel gefunden. Die Rechnung wurde ausgeführt unter der Voraussetzung, daß die Elektrolyte vollständig dissoziiert sind. Die Differenz der Werte  $E_{\text{Gesamtpot.}} - E_{\text{Elektrodenpot.}} = E_{\text{Diffusionspot.}}$  lieferte das Diffusionspotential. Die EMK. wurde auf  $18^\circ \text{C}$  umgerechnet. Da die Höhe der Elektrolyten, die gesondert in die Schenkel des U-Rohrs eingefüllt wurden, nicht genau genug abgemessen werden konnte, kam es öfters vor, daß die Trennungsfläche sich maximal um 2,5 cm verschob.

In Tab. 2 sind die Ergebnisse der Messungen zusammengestellt.

Man sieht aus Tab. 2, daß das Diffusionspotential sich im Laufe der Meßreihe ändert. Durch den Druckunterschied in den Elektrolyten zu beiden Seiten des Hahnes beobachtet man nach dem Öffnen des Hahnes eine kleine Verschiebung der Trennungsfläche in der Kapillare. Durch die Bewegung der beiden Elektrolyte erfolgt ein geringes Durchmischen beider Elektrolyte. Man erkennt dies an dem Verwaschenwerden der vorher scharfen Trennungsfläche beider Elektrolyte. Je nach der Größe und der Richtung der Verschiebung der Trennungs-

Tabelle 2

a)  $\frac{1}{100}$  n. KCl | 1 n. HCl  
 $u_H = 294$ ,  $u_K = 60,7$ ,  $v_{Cl} = 55,8$

I	II	III	III' *)	IV	IV' **)						
Verschiebung der Trennungsfläche während der Öffnung des Hahnes											
2 cm n. o.	2 cm n. u.	2 cm n. u.		1 cm n. u.							
Versuchstemperatur											
18,0° C		19,4° C		18,4° C		15,0° C		15,0° C			
Std.	$E_{\text{Diff}}$ i. mV	Std.	$E_{\text{Diff}}$ i. mV	Std.	$E_{\text{Diff}}$ i. mV	Std.	$E_{\text{Diff}}$ i. mV	Std.	$E_{\text{Diff}}$ i. mV		
0	94,2	0	93,9	0	94,6	0	90,6* 1)	0	94,1	0	90,6*
8	92,6	5	94,2	1	94,7	0,3	91,5* 2)	22	93,8	8	92,6
23	90,5	23	94,4	49	93,2	0,5	92,1* 3)	41	91,4	25	93,3
34	90,2	30	94,0	80	91,7	7	93,4	74	90,6	47	93,7
48	89,8	48	92,6	105	90,7	24	94,9	101	89,1	74	93,0
56	90,1	54	91,6	122	90,1	45	94,4	122	88,7	122	91,5
73	89,7	72	90,1	129	89,9	73	92,5	144	88,1	147	91,3
79	89,4	78	89,9	147	89,6	94	91,1	166	88,4	168	91,1
96	89,1	96	89,4	—	—	119	90,4	—	—	217	91,7
—	—	130	89,5	—	—	144	90,1	—	—	—	—
—	—	148	89,6	—	—	168	89,8	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	191	89,8	—	—	—	—

Die mit Strich bezeichneten Meßreihen sind die Fortsetzungen der Vorhergehenden.

\*) Die Grenzschicht wurde 3 mal durch Zusatz von einigen Tropfen  $\frac{1}{100}$  n. KCl-Lösung gestört. Das obere Ende der Grenzschicht befindet sich <sup>1)</sup> über dem Hahn, <sup>2)</sup> unter dem Hahn, <sup>3)</sup> an der unteren Erweiterung der Kapillare. Die Ablesungen nach Störungen wurden mit \* bezeichnet.

\*\*) Die Grenzschicht wurde 1 mal durch Zusatz von einigen Tropfen  $\frac{1}{100}$  n. KCl-Lösung gestört. Das obere Ende der Grenzschicht befindet sich an der unteren Erweiterung der Kapillare.

fläche nahm das gemessene Anfangspotential verschiedenen Wert an. In den meisten Fällen wurde nicht sofort der Maximalwert erhalten, sondern das Potential wuchs mit der Zeit an bis zu einem größten Wert. Danach erfolgte im Laufe der Zeit eine stetige Abnahme des Potentials bis zu einem Minimalwert. Zum Schluß pflegte das Potential langsam anzusteigen.

Beim Öffnen des Hahnes treten Strömungen auf. Dadurch wird wahrscheinlich die Grenzschicht, die ursprünglich plan ist, verzerrt, und es ergeben sich je nach der Größe der Verzerrung verschiedene Anfangswerte.

Tabelle 2 (Fortsetzung)

b)  $\frac{1}{100}$  n. LiCl | 1 n. HCl  
 $u_H = 294$ ,  $u_{Li} = 30,8$ ,  $v_{Cl} = 55,8$

I	I *)	II	III	IV	V	VI							
Verschiebung der Trennungsfläche während der Öffnung des Hahnes													
1,5 cm n. u.		0,5 cm n. u.	2,5 cm n. o.	2,0 cm n. u.	2,0 cm n. o.	2,0 cm n. u.							
Versuchstemperatur													
13,6° C	13,6° C	8,1° C	17,2° C	16,9° C	17,6° C	17,6° C							
Std.	$E_{\text{Diff.}}$ i. mV	Std.	$E_{\text{Diff.}}$ i. mV	Std.	$E_{\text{Diff.}}$ i. mV	Std.	$E_{\text{Diff.}}$ i. mV						
0	99,3	0	97,7*	0	101,7	0	97,4	0	96,4	0	97,0	0	96,8
26	100,9	4	97,7	9	102,3	3	96,3	5	97,4	0,5	97,4	15	98,0
49	101,1	24	99,1	24	100,8	4	95,8	15	97,6	2	97,8	24	98,0
75	100,2	47	99,0	49	97,5	11	92,8	41	96,5	13	93,9	36	97,8
97	98,8	97	97,0	73	96,4	21	91,6	65	95,5	20	92,6	40	97,5
122	97,4	123	95,8	96	96,5	32	92,0	90	94,9	25	92,1	73	95,6
144	95,5	146	94,5	—	—	—	—	137	93,9	35	92,0	147	94,5
193	94,4	172	95,2	—	—	—	—	186	93,4	49	92,1	192	94,1
216	94,0	—	—	—	—	—	—	233	91,8	—	—	241	93,7
243	93,8	—	—	—	—	—	—	279	90,5	—	—	289	93,0
264	93,9	—	—	—	—	—	—	292	90,4	—	—	326	92,4
—	—	—	—	—	—	—	—	351	92,9	—	—	337	92,5

\*) Die Grenzschrift wurde durch Zusatz von einigen Tropfen  $\frac{1}{100}$  n. LiCl Lösung gestört. Das obere Ende der Grenzschrift befindet sich unter dem Hahn.

Zunächst wird diese Verzerrung durch Diffusion ausgeglichen werden und das Potential nahezu den Hendersonschen Wert annehmen.

Weiterhin ändert sich durch Diffusion der gesamte Aufbau der Grenzschrift und das Potential nimmt ab. Solange die Grenzschrift sich in der Kapillare befindet, streben die Ionenkonzentrationen der Grenzschrift dem nach der Planckschen Theorie berechneten Wert zu, und das Potential nähert sich einem Minimum.

Wenn die Grenzschrift sich so ausdehnt, daß sie in das erweiterte U-Rohrende eintritt, wird die Randbedingung nicht mehr erfüllt, denn der Querschnitt oder, was auf dasselbe herauskommt, das Volumen, vergrößert sich im Verhältnis  $(0,15)^2 : 2^2$ . Infolgedessen wächst das Potential.

Aus diesen theoretischen Betrachtungen wird gefolgert, daß der größte Wert des Potentials in jeder Meßreihe dem

Tabelle 2 (Fortsetzung)

e)  $\frac{1}{10}$  n. LiCl | 1 n. HCl      d) 1 n. KCl | 1 n. HCl  
 $u_H = 294$ ,  $u_K = 60,7$ ,  $u_{Li} = 30,8$ ,  $v_{Cl} = 55,8$

I		I')		I		II	
Verschiebung der Trennungsfläche während der Öffnung des Hahnes							
0				0		2 cm n. o.	
Versuchstemperatur							
5,1° C		5,1° C		17,1° C		17,6° C	
Std.	$E_{\text{Diff.}}$ in mV	Std.	$E_{\text{Diff.}}$ in mV	Std.	$E_{\text{Diff.}}$ in mV	Std.	$E_{\text{Diff.}}$ in mV
0	72,9	0	70,8*	0	34,1	0	32,7
8	72,7	23	71,2	11	34,1	14	32,7
28	71,4	55	71,9	25	34,1	24	32,9
54	70,4	76	71,6	38	34,1	37	32,9
76	70,3	95	71,3	—	—	49	32,8
101	69,3	148	70,2				
127	68,9	169	69,6				
144	68,9	216	69,7				

\*) Die Grenzschicht wurde durch Zusatz von einigen Tropfen  $\frac{1}{10}$  n. LiCl-Lösung gestört. Das obere Ende der Grenzschicht befindet sich unter dem Hahn.

nach der Hendersonschen Formel berechneten Wert  $E_H$  entspricht und der kleinste Wert in jeder Meßreihe dem nach der Planckschen Formel errechneten Wert  $E_P$ . Der Übersicht halber sind in Tab. 3 die gemessenen Differenzen  $E_P - E_H$  für alle Meßreihen mit den nach den Formeln (2a), (3a) berechneten zusammengestellt.

Die zur Berechnung benutzte Formel von Planck legt die Annahme zugrunde, daß die Ionen sich unabhängig voneinander bewegen und die Elektrolyte vollständig dissoziiert sind. Tatsächlich ist dies nicht der Fall, da man den Debye-effekt berücksichtigen muß; bisher besitzen wir jedoch keine ausreichende Theorie. Unter denselben Annahmen wurde die Rechnung für  $E_H$  ausgeführt.

Aus Tab. 3 ersieht man, daß eine Abweichung der Differenz  $E_P - E_H$  zwischen den berechneten und den gemessenen Werten auftritt. Aber der Größenordnung und dem Vorzeichen der zeitlichen Änderung des Diffusionspotentials nach zeigt sich eine befriedigende Übereinstimmung mit der Planckschen Theorie.

Tabelle 3

Kombinationen	$E_P - E_H$ in mV		Mittel
	berechnet	gemessen	
$\frac{1}{100}$ n. KCl   1 n. HCl	-10,0	I. - 5,1 II. - 5,0 III. - 5,1 IV. - 6,0 III'. - 5,1 IV'. - 2,6	- 5,3
$\frac{1}{100}$ n. LiCl   1 n. HCl	-13,5	I. - 7,3 II. - 5,9 III. - 5,8 IV. - 7,2 V. - 5,8 VI. - 5,6 I'. - 4,6	- 6,3
$\frac{1}{10}$ n. LiCl   1 n. HCl	- 7,1	I. - 4,0 I'. - 2,3	- 4,0
1 n. KCl   1 n. HCl	0	I. - 0,0 II. - 0,1	- 0,1

Wenn man die Meßreihen III und III', IV und IV' in Tab. 2 a), I und I' in Tab. 2 b) und c) betrachtet, fällt folgendes auf. Hier unterscheidet sich ein „stationärer Zustand“ sehr deutlich von dem „Mischungszustand“. Läßt man das ganze System in Ruhe, dann geht der Mischungszustand in den stationären Zustand über und nähert sich das Potential dem Planckschen Wert. Wenn die Grenzschrift gestört wird, erhalten wir einen Übergang von dem stationären Zustand in den Mischungszustand und das Potential nimmt den Hendersonschen Wert an. Im Laufe der Zeit nimmt die Grenzschrift wiederum den stationären Zustand an, und das Potential nähert sich dem Planckschen Wert, wenn man das System in Ruhe stehen läßt. In den Meßreihen IV und IV' in Tab. 2 a) und I und I' in Tab. 2 b) und c) tritt eine Diskrepanz zwischen dem Wert der ersten Meßreihe und dem Wert der zweiten auf. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Untergrenze der Grenzschrift bei der zweiten Meßreihe nicht mehr reine Elektrolyte, sondern eine Mischung enthält. Deswegen wurden für den Mittelwert die Werte der zweiten Meßreihe nicht mitbenutzt.

Die Zeitdauer, in der der Diffusionsvorgang sich vollzieht, ist viel länger als diejenige für den Übergang von dem stationären Zustand in den Mischungszustand durch Umrühren o. dgl.



Daraus läßt sich erklären, warum man den Hendersonschen Wert erhält, wenn man kurz nach der Zusammensetzung der Apparaturen das Flüssigkeitspotential mißt.

Über die Zeitdauer, in der der Hendersonsche Wert in den Planckschen Wert übergeht, kann man einen Überblick erhalten, wenn man die Meßreihen I in Tab. 2 a) und III und V in Tab. 2 b) mit den anderen Meßreihen in den entsprechenden Tabellen vergleicht. Je näher sich die Grenzschicht an der oberen Erweiterung der Kapillare befindet, desto schneller vollzieht sich der Diffusionsvorgang. Da die Beweglichkeit des K- bzw. Li-Ions viel langsamer als diejenige des H-Ions ist, wird in diesem Falle die Anreicherung der Ionengehalte des K- bzw. Li-Ions in der Grenzschicht erleichtert. Solange die Grenzschicht sich in der Kapillare befindet und die Ionengehalte den nach der Planckschen Theorie berechneten Werten genügen, ergibt die Potentialdifferenz derselben Kette den nämlichen Wert. Es kommt dann nicht darauf an, wo die Anfangsstelle der Grenzschicht in der Kapillare sich befindet.

Aus der Tab. 2 d) erkennt man, daß das Potential ziemlich konstant ist, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

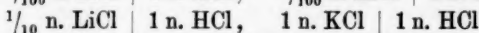
Demzufolge ist die einzelne Ionenkonzentration nicht linear von der laufenden Koordinate  $x$  abhängig, sondern sie ändert sich linear mit einer Funktion  $\alpha$ , deren Abhängigkeit von  $x$  durch die folgende Beziehung

$$x = \frac{\alpha + \lambda \ln \left( 1 + \frac{S_1}{S_2} \alpha \right)}{1 + \lambda \ln \frac{S_2}{S_1}}$$

gegeben ist (vgl. S. 520).

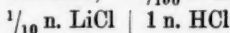
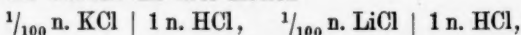
#### Zusammenfassung

1. Es wurde bei den Ketten



die zeitliche Änderung des Diffusionspotentials untersucht.

2. Es wurden die drei Ketten



untersucht, nachdem die Grenzschicht gestört wurde. Nach der Störung erhält man wiederum den stationären Planckschen Zustand.



3. Die einzelnen Ionenkonzentrationen bzw. Ionengehalte in der Grenzschrift wurden berechnet.

4. Es wurden die Zeitdauern für die Vollziehung des Diffusionsvorganges und diejenige für den Übergang vom stationären Zustand in den Mischungsstand untersucht. Diese ist viel kürzer als jene.

5. Es konnte in allen untersuchten Fällen gezeigt werden, daß sich die Versuchsergebnisse durch die Plancksche Theorie erklären lassen.

6. In der Praxis wird man, zumal bei eben zusammengesetzten Ketten, stets hinreichend genau die übrigens an sich einfachere Hendersonformel benutzen dürfen.

Für die Anregung zu dieser Arbeit möchte ich den Herren Prof. Nernst und Planck meinen aufrichtigen Dank aussprechen. Zu Dank verpflichtet bin ich weiterhin Hrn. Dr. Orthmann für seine mannigfachen Ratschläge.

Berlin-Halensee, Joachim Friedrichstr. 43, Ggeb. II.

(Eingegangen 24. November 1932)

---

**Die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes  
reiner Metalle von der Temperatur**

**Von E. Grüneisen**

§ 1. Die Blochsche Theorie<sup>1)</sup> ergibt in höchsten und tiefsten Temperaturen eine bestimmte Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur, läßt aber den Verlauf im Zwischengebiet offen. Für dieses wurde als Temperaturfunktion des Widerstandes ein Integralausdruck vorgeschlagen<sup>2)</sup>, der die Blochschen Gesetzmäßigkeiten als Grenzfälle enthält. Er hat sich in einigen Fällen bereits an der Erfahrung bestätigt. Indessen ist die Berechnung des Integrals noch nicht mit der erwünschten Genauigkeit, noch auch für eine genügende Anzahl von Grenzwerten durchgeführt, um die Gültigkeit am Experiment mit voller Schärfe zu prüfen. Ich habe deshalb mit Hilfe der Herren Wertz, Evert und Reddemann die früher für das Integral mitgeteilte Tabelle<sup>2)</sup> wesentlich erweitert und hoffe, daß sie nunmehr für die praktische Verwendung ausreichen wird.

Mittels der neuen Tabelle ist dann die Widerstandsformel an einigen Metallen erprobt, wobei noch ein Korrektionsfaktor zugefügt werden mußte, um die Formel auch für hohe Temperaturen brauchbar zu machen.

§ 2. Ist  $\rho$  der spez. Widerstand,  $T$  die absolute Temperatur,  $\sigma = \rho/T$ , so steigt nach der Theorie  $\sigma$  vom Werte 0 beim Nullpunkt bis zu einem konstanten Grenzwert  $\sigma_\infty$  bei hoher Temperatur. Und zwar soll gelten<sup>2)</sup>

$$(1) \quad \frac{\sigma}{\sigma_\infty} = \frac{20}{x^4} \int_0^x \frac{\xi^4 d\xi}{e^\xi - 1} - \frac{4x}{e^x - 1}, \quad \text{mit } x = \frac{\Theta}{T}.$$

Für große  $x$  (etwa  $x > 3$ ) benutzt man die Entwicklung

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sigma}{\sigma_\infty} &= \frac{497,725}{x^4} - \frac{4x}{e^x - 1} - 20x \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-nx} \left[ \frac{1}{nx} + \frac{4}{(nx)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{(nx)^3} + \frac{24}{(nx)^4} + \frac{24}{(nx)^5} \right]. \end{aligned} \right.$$

1) F. Bloch, *Ztschr. f. Phys.* **52**, S. 555. 1928; **59**, S. 208. 1930.

2) E. Grüneisen, *Leipziger Vorträge* 1930, S. 46. Vgl. hierzu L. Brillouin, *Die Quantenstatistik*, Berlin 1931, S. 370ff.; R. Peierls, *Ergebnisse d. exakten Naturw.* **XI**, S. 314. 1932.

Für kleine  $x$  (etwa  $x < 3$ ) kann man folgende Reihe nehmen:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\sigma}{\sigma_{\infty}} = 1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \frac{2n-1}{2n+4} x^{2n} \\ = 1 - \frac{x^2}{a_1} + \frac{x^4}{a_2} - \frac{x^6}{a_3} + \dots \end{cases}$$

Hier bedeuten  $B_n$  die Bernoullischen Zahlen, die in Tab. 1 mit den daraus berechneten  $1/a_n$  bis  $n=8$  angegeben sind.

Tabelle 1

$n$	$B_n$	$1/a_n$	$n$	$B_n$	$1/a_n$
1	$\frac{1}{6}$	$5,5555 \cdot 10^{-3}$	5	$\frac{5}{66}$	$5,368 \cdot 10^{-8}$
2	$\frac{1}{30}$	$2,0833 \cdot 10^{-3}$	6	$\frac{691}{2730}$	$1,453 \cdot 10^{-9}$
3	$\frac{1}{42}$	$6,6138 \cdot 10^{-5}$	7	$\frac{7}{6}$	$3,866 \cdot 10^{-11}$
4	$\frac{1}{30}$	$1,9290 \cdot 10^{-6}$	8	7,093	$1,017 \cdot 10^{-13}$

Tab. 2 gibt die Werte von  $\sigma/\sigma_{\infty}$  für  $x=0$  bis 80. Für größere  $x$  (etwa  $x > 20$ ) nimmt  $\sigma/\sigma_{\infty}$  mehr und mehr wie  $x^{-4}$  ab. Die meisten Tabellenzahlen sind unabhängig zweimal gerechnet, die übrigen durch Bildung der ersten und zweiten Differenzen kontrolliert. Die Werte dürften bis auf eine halbe Einheit der letzten mitgeteilten Ziffer richtig sein.

§ 3. Daß Formel 1 sich den Beobachtungen an reinstem Kupfer, Gold und Wolfram in tiefster Temperatur ziemlich gut anschließt, wurde früher gezeigt.<sup>1)</sup> W. Meissner<sup>2)</sup> hat sie nunmehr auch für reines Blei gültig gefunden. Er extrapolierte die Widerstandskurve bis unterhalb des Sprungpunktes, indem er die Supraleitung durch ein Magnetfeld vernichtete und so den Restwiderstand maß.

Störend wirkt bei den Vergleichen zwischen Theorie und Experiment, daß Formel 1 in hoher Temperatur ja unbedingt versagen muß, weil sie  $\rho \sim T$  werden läßt, was für kein Metall zutrifft. Wir wollen dieser Abweichung von der Proportionalität mit  $T$  wie schon früher<sup>3)</sup>, dadurch Rechnung tragen, daß wir

$$(4) \quad \rho = T \sigma [1 + a_1 T + a_2 T^2]$$

1) E. Grüneisen, a. a. O.

2) W. Meissner, Ann. d. Phys. [5] 13. S. 641. 1932.

3) E. Grüneisen, Phys. Zeitschr. 19. S. 382. 1918.

Tabelle 2

$x = \frac{\Theta}{T}$	$\frac{\sigma}{\sigma_{\infty}}$	$\Delta$	$x = \frac{\Theta}{T}$	$\frac{\sigma}{\sigma_{\infty}}$	$\Delta$	$x = \frac{\Theta}{T}$	$\frac{\sigma}{\sigma_{\infty}}$	$\Delta$
0	1,0000	6	4,5	0,3867	137 <sub>s</sub>	9,0	0,06740	250
0,1	0,9994	16 <sub>s</sub>	4,6	0,3729	134	9,1	0,06490	240
0,2	0,9978	28	4,7	0,3595	130	9,2	0,06250	229 <sub>s</sub>
0,3	0,9950	38 <sub>s</sub>	4,8	0,3466	126	9,3	0,06021	220
0,4	0,9912	50	4,9	0,3340	123	9,4	0,05800	211 <sub>s</sub>
0,5	0,9862	59	5,0	0,3217	119	9,5	0,05589	203
0,6	0,9803	70	5,1	0,3098	115	9,6	0,05386	194
0,7	0,9733	80	5,2	0,2983	112	9,7	0,05192	186 <sub>s</sub>
0,8	0,9653	90	5,3	0,2871	108	9,8	0,05005	179
0,9	0,9563	98 <sub>s</sub>	5,4	0,2763	105	9,9	0,04826	171
1,0	0,9465	108	5,5	0,2658	101	10,0	0,04655	165
1,1	0,9357	116	5,6	0,2557	97	10,1	0,04490	158
1,2	0,9241	124	5,7	0,2460	94	10,2	0,04332	151
1,3	0,9118	132	5,8	0,2366	91	10,3	0,04181	145
1,4	0,8986	138	5,9	0,2275	87 <sub>s</sub>	10,4	0,04035	139
1,5	0,8848	144	6,0	0,2187	84 <sub>s</sub>	10,5	0,03896	134
1,6	0,8704	150	6,1	0,2103	81 <sub>s</sub>	10,6	0,03762	129
1,7	0,8554	155 <sub>s</sub>	6,2	0,2021	78 <sub>s</sub>	10,7	0,03633	124
1,8	0,8398	160 <sub>s</sub>	6,3	0,1942 <sub>s</sub>	75 <sub>s</sub>	10,8	0,03509	119
1,9	0,8238	165 <sub>s</sub>	6,4	0,1867	72 <sub>s</sub>	10,9	0,03390	114
2,0	0,8073	168 <sub>s</sub>	6,5	0,1795	70	11,0	0,03276	109 <sub>s</sub>
2,1	0,7905	171 <sub>s</sub>	6,6	0,1725	67	11,1	0,03167	105 <sub>s</sub>
2,2	0,7733	174 <sub>s</sub>	6,7	0,1658	64 <sub>s</sub>	11,2	0,03061	101
2,3	0,7559	176	6,8	0,1593	62	11,3	0,02960	97
2,4	0,7383	178	6,9	0,1531	60	11,4	0,02863	93 <sub>s</sub>
2,5	0,7205	179	7,0	0,1471 <sub>s</sub>	57 <sub>s</sub>	11,5	0,02769	90
2,6	0,7026	180	7,1	0,1414	55	11,6	0,02680	86 <sub>s</sub>
2,7	0,6846	180	7,2	0,1359	53	11,7	0,02593	83
2,8	0,6666	180	7,3	0,1306	50 <sub>s</sub>	11,8	0,02510	80
2,9	0,6486	179	7,4	0,1255 <sub>s</sub>	48 <sub>s</sub>	11,9	0,02430	77
3,0	0,6307	179	7,5	0,1206 <sub>s</sub>	468	12,0	0,02353	74
3,1	0,6128	177 <sub>s</sub>	7,6	0,11599	449	12,1	0,02279	71
3,2	0,5950	176 <sub>s</sub>	7,7	0,11150	431	12,2	0,02208	68 <sub>s</sub>
3,3	0,5775	174	7,8	0,10719	413	12,3	0,02139	66
3,4	0,5600	172	7,9	0,10306	397	12,4	0,02073	63 <sub>s</sub>
3,5	0,5428	170	8,0	0,09909	380	12,5	0,02009	61
3,6	0,5259	167	8,1	0,09529	364	12,6	0,01948	59
3,7	0,5091	164	8,2	0,09165	349	12,7	0,01889	57
3,8	0,4927	161	8,3	0,08816	336	12,8	0,01832	54 <sub>s</sub>
3,9	0,4766	158	8,4	0,08480	321	12,9	0,01777	52 <sub>s</sub>
4,0	0,4608	155	8,5	0,08159	308	13,0	0,01725	101
4,1	0,4453	152	8,6	0,07851	295 <sub>s</sub>	13,2	0,01624	93
4,2	0,4301	148	8,7	0,07555	283 <sub>s</sub>	13,4	0,01531	87
4,3	0,4153	145	8,8	0,07272	272	13,6	0,01445	81
4,4	0,4008	141	8,9	0,07000	260	13,8	0,01364	75
4,5	0,3867		9,0	0,06740		14,0	0,01289	

Tabelle 2 (Fortsetzung)

$x = \frac{\Theta}{T}$	$\frac{\sigma}{\sigma_{\infty}}$	$\Delta$	$x = \frac{\Theta}{T}$	$\frac{\sigma}{\sigma_{\infty}}$	$\Delta$	$x = \frac{\Theta}{T}$	$\frac{\sigma}{\sigma_{\infty}}$
14,0	0,01289	70 <sub>8</sub>	17,0	0,0 <sub>8</sub> 5955	272	36	0,0 <sub>8</sub> 2963
14,2	0,012185	657	17,2	0,0 <sub>8</sub> 5683	256	38	0,0 <sub>8</sub> 2387
14,4	0,011528	613	17,4	0,0 <sub>8</sub> 5427	242	40	0,0 <sub>8</sub> 1944
14,6	0,010915	571	17,6	0,0 <sub>8</sub> 5185	229	44	0,0 <sub>8</sub> 1328
14,8	0,010344	539	17,8	0,0 <sub>8</sub> 4956	216	48	0,0 <sub>8</sub> 9375
15,0	0,0 <sub>8</sub> 9805	503	18,0	0,0 <sub>8</sub> 4740	—	50	0,0 <sub>8</sub> 7964
15,2	0,0 <sub>8</sub> 9302	471	19,0	0,0 <sub>8</sub> 3819	—	52	0,0 <sub>8</sub> 6806
15,4	0,0 <sub>8</sub> 8831	442	20,0	0,0 <sub>8</sub> 3111	—	56	0,0 <sub>8</sub> 5061
15,6	0,0 <sub>8</sub> 8389	415	22	0,0 <sub>8</sub> 2125	—	60	0,0 <sub>8</sub> 3841
15,8	0,0 <sub>8</sub> 7974	390	24	0,0 <sub>8</sub> 1500	—	64	0,0 <sub>8</sub> 2967
16,0	0,0 <sub>8</sub> 7584	366	26	0,0 <sub>8</sub> 1089	—	68	0,0 <sub>8</sub> 2328
16,2	0,0 <sub>8</sub> 7218	345	28	0,0 <sub>8</sub> 8097	—	70	0,0 <sub>8</sub> 2073
16,4	0,0 <sub>8</sub> 6873	324	30	0,0 <sub>8</sub> 6145	—	72	0,0 <sub>8</sub> 1852
16,6	0,0 <sub>8</sub> 6549	306	32	0,0 <sub>8</sub> 4747	—	76	0,0 <sub>8</sub> 1492
16,8	0,0 <sub>8</sub> 6243	288	34	0,0 <sub>8</sub> 3724	—	80	0,0 <sub>8</sub> 1215
17,0	0,0 <sub>8</sub> 5955						

setzen. Der Klammerausdruck ist eine mangels einer Theorie rein empirische Korrektur, die den glatten Übergang nach hohen Temperaturen vermittelt.

Daß ein Korrekturfaktor der angegebenen Form auftreten muß, läßt sich auf Grund des nahen Zusammenhangs zwischen elektrischem Widerstand und Energieinhalt des Metalls verstehen. Denn auch letzterer bekommt nach Born und Brody<sup>1)</sup> bei Berücksichtigung des anharmonischen Charakters der Atomschwingungen in höherer Temperatur einen Faktor von der Form  $[1 + b \cdot T]$ . Daneben scheinen aber auch die magnetischen Eigenschaften der Metalle Einfluß zu haben.<sup>2)</sup>

§ 4. In Tab. 3—11 gebe ich nunmehr einige Beispiele, die Hr. Wertz und ich durchgerechnet haben. Die Beobachtungen<sup>3)</sup> sind nach der Matthiessen-Nernst-Regel

$$r_{\text{red.}} = \frac{r_{\text{beob.}} - z}{1 - z}$$

auf den Idealzustand reduziert, wofür in den meisten Fällen die Messungen von W. Meissner<sup>4)</sup> und seinen Mitarbeitern im

1) M. Born u. E. Brody, Ztschr. f. Phys. 6. S. 132. 1921.

2) Betreffs der ferromagnetischen Metalle vgl. W. Gerlach u. K. Schneiderhan, Ann. d. Phys. [5] 6. S. 772. 1930.

3) Die Namen der Beobachter sind in den Tabellenköpfen vermerkt; die einschlägigen Zitate vgl. Handb. d. Phys. Bd. XIII. S. 16—17. 1928; W. Meissner u. B. Voigt, Ann. d. Phys. [5] 7. S. 761 u. 892. 1930.

4) W. Meissner u. B. Voigt, Ann. d. Phys. [5] 7. S. 761 u. 892. 1930.

Gebiet des flüssigen Heliums die Grundlage bildeten. Es bedeutet  $r = \rho_T: \rho_{273,2^\circ}$ . Die  $r'$  in der vorletzten Spalte sind *ohne*, die  $r$  in der letzten Spalte *mit* dem Korrektionsfaktor  $[1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2]$  gerechnet, dessen Bedeutung durch den Vergleich beider Spalten klar wird. Der dem Gebiet hoher Temperaturen angepaßte Faktor verbessert die Leistungsfähigkeit der Formel 1 auch in tiefer Temperatur.

Als allgemeines Ergebnis der Tab. 3—11 folgt: Je idealer die Metallprobe, je kleiner also ihr Restwiderstand, um so besser stellt Formel 4 den Abfall des Widerstandes mit der Temperatur dar. Je größer der Restwiderstand, um so größer ist die Differenz  $r_{\text{red.}} - r_{\text{ber.}}$  am tiefsten beobachteten Temperaturpunkt; sie beträgt jedoch meist nicht mehr als rund 10% von  $z$ .

Tabelle 3

Lithium;  $\Theta = 363$ ;  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = 0$ 

$T$ ° K	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,0058$		$r'_{\text{ber.}} = r_{\text{ber.}}$	Bemerkungen
	Mssr. Li 1	Mssr. Li 2		
20,41		0,0013 <sub>2</sub>	0,00041	Der Korrektionsfaktor blieb fort, da die Beobachtungen noch nicht genügend ausgedehnt sind, um ihn zu begründen. Vielleicht könnte man $\Theta$ noch etwas kleiner ansetzen und dann mit dem Korrektionsfaktor rechnen.
77,74	(0,1159)	0,1169	0,1139	
80,13	0,1255	(0,1252)	0,1236	
86,32	(0,1505)	0,1464	0,1494	
90,89	0,1689	(0,1621)	0,1692	
273,2	1	1	1	
329,7	1,247	—	1,243	
374,5	1,443	—	1,433	

Tabelle 4

Natrium;  $\Theta = 202$ ;  $\alpha_1 = +5,4 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_2 = +5,1 \cdot 10^{-8}$ 

$T$ ° K	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,00323$	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,00381$	$r'_{\text{ber.}}$	$r_{\text{ber.}}$
	Meissner	K. Onnes u. Woltjer		
13,2	—	0,0006 <sub>0</sub>	0,00045	0,00040
20,42	0,0034	—	0,00373	0,00327
56,77	—	0,1055	0,1141	0,1022
77,6	0,1849	—	0,2055	0,1860
87,81	0,2279	—	0,2504	0,2279
108,72	—	0,316 <sub>8</sub>	0,3407	0,3135
170,87	—	0,567 <sub>2</sub>	0,5971	0,5672
273,2	1	1	1	1

Tabelle 5

Kupfer;  $\Theta = 333$ ;  $\alpha_1 = +5 \cdot 10^{-5}$ ;  $\alpha_2 = +9 \cdot 10^{-8}$ 

$T$ ° K	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,0003$ Messr., Grü. u. Goe.	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,0075$ Holborn	$r'_{\text{ber.}}$	$r_{\text{ber.}}$	Bemerkungen
4,2	0,0000 <sub>0</sub>	—	0,0,2	0,0,2	*) Beobachtung von Northrup an reinem Cu (un- korrigiert).
20,4	0,00051	—	0,000564	0,000553	
81,2	0,141	—	0,1435	0,1413	
81,62	0,143 <sub>0</sub>	—	0,1453	0,1431	
90,2	0,1804	—	0,1828	0,1801	
195,2	—	0,658	0,6623	0,6576	
273,2	1	1	1	1	
373,2	—	1,436	1,418	1,433	
473,2	—	1,873	1,828	1,873	
573,2	—	2,318	2,234	2,317	
673,2	—	2,773	2,637	2,777	
773,2	—	3,242	3,039	3,254	
1273	—	5,91 *)	5,03	6,09	

Tabelle 6

Silber;  $\Theta = 223$ ;  $\alpha_1 = +1,5 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_2 = +2,7 \cdot 10^{-8}$ 

$T$ ° K	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,00679$ Messr.	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,0022$ Holborn	$r'_{\text{ber.}}$	$r_{\text{ber.}}$	Bemerkungen
20,4	0,00323	(0,00323)	0,00262	0,00252	Die Silberproben von Hol- born u. Meissner sollen zwar identisch sein, lieferten aber einen erheblich verschiedenen Widerstand bei 20,4° K. Des- halb mußte für die Holborn- schen Messungen ein kleinerer Restwiderstand angenommen werden, damit beide Reihen bei 20,4° K übereinstimmen.
78,85	0,1919	—	0,1981	0,1921	
87,42	0,2297	—	0,2362	0,2294	
195,2	—	0,6834	0,6900	0,6816	
273,2	1	1	1	1	
373,2	—	1,411	1,390	1,412	
573,2	—	2,266	2,159	2,266	
773,2	—	3,173	2,922	3,172	

Dementsprechend stimmt die Formel sehr gut bei Cu, Au, Pb und W, die einen Restwiderstand  $z$  von nur einigen Zehntausendteilen haben, weniger gut bei den anderen Metallen, deren  $z$  rund zehnmal größer ist. Und zwar liegen die berechneten Widerstände hier durchweg unter den reduzierten Beobachtungen. Dies könnte so gedeutet werden, daß der Restwiderstand, z. B. bei 20,4° K größer war, als er von Meissner im Gebiet unter 4° K gemessen und der Berechnung

von  $r_{\text{red.}}$  zugrunde gelegt wurde, d. h. daß der Restwiderstand  $z$  nicht temperaturunabhängig war, sondern in diesen Fällen mit der Temperatur etwas anstieg.

Tabelle 7

Gold;  $\Theta = 175$ ;  $\alpha_1 = +1,9 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_2 = 0$ 

$T$ ° K	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,00029$ Meissner	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,00223$ K. Onnes u. Clay	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,001$ Holborn	$r'_{\text{ber.}}$	$r_{\text{ber.}}$
4,2	0,03	—	—	0,02 <sub>a</sub>	0,02 <sub>a</sub>
11,1	—	0,00030	—	0,00033	0,00032
12,1	—	0,00048	—	0,00051	0,00049
14,3	—	0,00137	—	0,00117	0,00111
18,0	—	0,0035	—	0,00347	0,00331
20,4	0,0057 <sub>2</sub>	0,0059	—	0,00605	0,00577
57,8	—	0,1314	—	0,1354	0,1301
78,8 <sub>a</sub>	0,2187	—	—	0,2274	0,2194
87,4 <sub>3</sub>	0,2551	—	—	0,2642	0,2553
169,3	—	0,592	—	0,5978	0,587
195,2	—	—	0,695	0,6992	0,689
273,2	1	1	1	1	1
373,7	1,402	—	—	1,382	1,407
473,2	—	—	1,81	1,758	1,82
573,2	—	—	2,24	2,135	2,25
673,2	—	—	2,68	2,511	2,69
773,2	—	—	3,15	2,887	3,15

Tabelle 8

Aluminium;  $\Theta = 395$ ;  $\alpha_1 = +2,95 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_2 = -1,38 \cdot 10^{-7}$ 

$T$ ° K	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,0065$ Mssr.; Grü. u. Goe.	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,0401$ Holborn	$r'_{\text{ber.}}$	$r_{\text{ber.}}$
20,44	0,0010	0,0010	0,00030	0,00028
77,73	0,0949	—	0,0991	0,0947
81,20	—	0,1085	0,1127	0,1078
85,12	0,1215	—	0,1282	0,1227
90,2	0,1431	—	0,1493	0,1431
195,2	—	0,632	0,6435	0,6327
273,2	1	1	1	1
373,2	1,470	1,466	1,439	1,467
473,2	—	1,929	1,868	1,935
573,2	—	2,406	2,290	2,405



Tabelle 9

Blei;  $\Theta = 86$ ;  $\alpha_1 = + 3 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_2 = + 1,85 \cdot 10^{-7}$ 

$T$ ° K	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,00015$ Meissner	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,0004$ Tuyn	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,0001$ Henning	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,001$ Holborn	$r'_{\text{ber.}}$	$r_{\text{ber.}}$
4,2	0,00002*)	—	—	—	0,000044	0,000040
7,26	0,00060	0,0006	—	—	0,000661	0,000605
7,6	—	0,0007	—	—	0,000824	0,000753
8,7	—	0,0014	—	—	0,001554	0,00142
10,4	—	0,0036	—	—	0,003416	0,00313
14,02	0,01025	—	—	—	0,01071	0,00981
14,09	—	0,01038	—	—	0,01089	0,00998
16,57	—	0,01676**)	—	—	0,01826	0,01675
20,32	0,02905	—	—	—	0,03181	0,02921
80	—	—	0,2592	—	0,2763	0,2585
90	—	—	0,2960	—	0,3150	0,2956
100	—	—	0,3329	—	0,3533	0,3327
120	—	—	0,4069	—	0,4293	0,4069
150	—	—	0,5192	—	0,5421	0,5191
200	—	—	0,7098	—	0,7286	0,7098
273,2	1	1	1	1	1	1
373,2	—	—	1,422	1,422	1,3695	1,422
473,2	—	—	—	1,878	1,739	1,878
573,2	—	—	—	2,380	2,107	2,370

\*) Vgl. W. Meissner, Ann. d. Phys. 13. S. 641. 1932.

\*\*) Den Tabellen von Kamerlingh Onnes u. Tuyn, Comm. Leiden Suppl. 58. S. 23 entnommen.

Tabelle 10

Wolfram;  $\Theta = 333$ ;  $\alpha_1 = + 4,95 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_2 = 0$ 

$T$ ° K	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,00052$ Mssr.; Grü. u. Goe.	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,0312$ Holborn	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,06$ Pirani	$r'_{\text{ber.}}$	$r_{\text{ber.}}$
20,4	0,00056	—	—	0,00057	0,00050
77,6	0,1151	—	—	0,1284	0,1174
87,4	0,1561	—	—	0,1704	0,1566
90,2	0,1683	0,168	—	0,1828	0,1682
195,2	—	0,641	—	0,6623	0,640
273,2	1	1	1	1	1
373,2	1,482	1,480	—	1,418	1,480
473,2	—	1,988	—	1,828	1,988
573,2	—	2,527	—	2,234	2,526
673,2	—	3,091	3,09	2,637	3,097
1273,2	—	—	6,96	5,03	7,22

Tabelle 11  
Rhodium;  $\Theta = 370$ ;  $\alpha_1 = +2 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_2 = +1,06 \cdot 10^{-7}$ 

$T$ ° K	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,00296$ Mssr.; Grö. u. Goe.	$r_{\text{red.}}$ $z = 0,049$ Holborn	$r'_{\text{ber.}}$	$r_{\text{ber.}}$
20,44	0,00057	—	0,00038	0,00036
77,6	0,1039	—	0,1101	0,1053
81,2	0,1187	0,1187	0,1244	0,1191
87,4	0,1441	—	0,1503	0,1441
90,2	0,1568	—	0,1624	0,1557
195,2	—	0,642	0,651	0,639
273,2	1	1	1	1
373,2	—	1,466	1,430	1,466
573,2	—	2,453	2,266	2,451
773,2	—	3,538	3,088	3,540

Dieser Schluß wird durch eine Reihe von Beobachtungen bekräftigt, die Goens und Verf. früher<sup>1)</sup> an einer größeren Zahl verschieden reiner, aber immerhin hochwertiger Kupferproben gemacht haben. Wenn diese Proben ein konstantes  $z$  hätten, müßten sich ihre Widerstände alle durch ein passend gewähltes  $z$  auf die des reinsten Kupfers, welches mit dem der Tab. 5, Spalte 2 identisch ist, reduzieren lassen. Tab. 12 zeigt aber, daß die zur Reduktion bei  $T = 20,4^\circ$  nötigen  $z$  kleiner sind, als die bei  $T = 90,2^\circ$  nötigen. Und zwar ist diese Veränderung von  $z$  prozentisch am stärksten bei den kleineren  $z$ -Werten. Die Proben mit gleicher Ziffer unterscheiden sich nur durch mechanische oder thermische Behandlung. Auch jene kann stark temperaturabhängige Zusatzwiderstände geben.<sup>2)</sup>

Tabelle 12  
Veränderung des Matthiessenschen Zusatzwiderstands  
mit der Temperatur

$z_T$	Cu 4a	Cu 4	Cu 12a	Cu 12b	Cu 6a	Cu 6	Cu 9a	Cu 9
$z_{20,4^\circ}$	0,0 <sub>2</sub> 165	0,0 <sub>2</sub> 226	0,0 <sub>2</sub> 355	0,0 <sub>2</sub> 761	0,0 <sub>2</sub> 764	0,01171	0,0220	0,0225
$z_{90,2^\circ}$	0,0 <sub>2</sub> 44	0,0 <sub>2</sub> 47	0,0 <sub>1</sub> 64	0,0 <sub>2</sub> 95	0,0 <sub>2</sub> 92	0,0133	0,0245	0,0255

§ 5. Aus alledem geht die Unsicherheit der Reduktion auf ideales Metall hervor, selbst wenn die Restwiderstände  $z$  nur einige Promille ausmachen. Es wird daher auch zweck-

1) E. Grüneisen u. E. Goens, *Ztschr. f. Phys.* **44**, S. 615. 1927; in obiger Tab. 12 sind noch einige Proben aufgenommen, die a. a. O. fehlen.

2) Vgl. z. B. E. Grüneisen u. E. Goens, a. a. O. Tab. 5: Kupfer 2, 2a u. 2b.

mäßig sein, mit der Prüfung der Formel an weiteren Beispielen zu warten, bis auch die übrigen regulären Metalle in dem wünschenswerten Reinheitsgrad vorliegen. Nur über Platin und Palladium noch einige Worte. Merkwürdigerweise sind bei diesen beiden Metallen die Ergebnisse der Formel unbefriedigend. Nicht nur ist der bekannte stark verzögerte Anstieg des Widerstands in höherer Temperatur durch den Korrektionsfaktor mit negativem  $\alpha_2$  nicht gut wiederzugeben, sondern auch in tiefer Temperatur, etwa unterhalb  $20^\circ$  K, bleibt der beobachtete Widerstand  $r_{\text{red.}}$  erheblich über dem berechneten, wenn man für Platin  $\Theta_r = \Theta_c = 225$ , für Palladium  $\Theta_r = 260$  setzt. Es gelang nicht, für Pt eine ebenso gute Darstellung mit der neuen Formel zu erzielen, wie mit der älteren empirischen, die an Stelle von  $\sigma$  die Debyesche Atomwärmefunktion benutzt.<sup>1)</sup>

Da auch Tantal nach Holborn in hoher Temperatur sich ähnlich wie Pt und Pd verhält, so könnte man vermuten, daß die Ausnahmestellung dieser Metalle mit ihrem starken Paramagnetismus zusammenhängt. Indessen zeigen andere paramagnetische Metalle, wie Rh durchaus normales Verhalten. Nur noch Al verlangt ein negatives  $\alpha_2$  und vielleicht auch Wolfram.

§ 6. Zum Schluß vergleichen wir die zur Darstellung des Widerstands benötigten  $\Theta_r$  mit den aus der spezifischen Wärme folgenden  $\Theta_c$  (Tab. 13). Die systematischen Differenzen zwischen

Tabelle 13

	Li	Na	Cu	Ag	Au	Al	Pb	W	Rh
$\Theta_r$	363	202	333	223	175	395	86	333	370
$\Theta_c$	?	159 <sup>a)</sup> (202)	330 <sup>a)</sup> -315	210 <sup>a)</sup> -225	163 <sup>b)</sup> -186	390 <sup>b)</sup>	82 <sup>c)</sup> -88	337 <sup>b)</sup> -305	?

1) Vgl. Handb. d. Phys. XIII. S. 21. 1928.

2) F. Simon u. W. Zeidler, Ztschr. f. phys. Chem. **123**. S. 383. 1926; aus einer einfachen Debyefunktion ergibt sich  $\Theta_c = 159$ ; aus der Hypothese eines Quantensprungs leitet F. Simon (Berl. Ber. **33**. S. 477. 1926);  $\Theta_c = 202$  ab, in völliger Übereinstimmung mit  $\Theta_r$ .

3) W. H. Keesom u. H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden Nr. 147 a. 1915.

4) A. Eucken, K. Clusius u. H. Woitinek, Ztschr. f. anorg. Chem. **203**. S. 47. 1931. Die kleinere Zahl gilt im  $T^3$ -Gebiet.

5) K. Clusius u. P. Harteck, Ztschr. f. phys. Chem. **134**. S. 243. 1928.

6) F. Simon, in Landolt-Börnstein-Tabellen 5. Aufl., I, Erg.-Bd. S. 707. 1927.

7) W. H. Keesom u. J. N. van den Ende, Comm. Leiden Nr. 203 d. 1930.

8) Fr. Lange, Ztschr. f. phys. Chem. **110**. S. 343. 1924.

beiden Größen, wie sie bei Anwendung der älteren Formel ( $\rho \sim TC_p$ ) sich ergaben<sup>1)</sup>, sind jetzt so gut wie verschwunden. Die starke Differenz beim Na läßt sich nach Simon auf einen Quantensprung zurückführen.<sup>2)</sup>

#### Zusammenfassung

1. Es wird eine genaue Berechnung der Funktion  $\sigma$  [Gl. (1)] durchgeführt und in Tabellenform mitgeteilt.

2. Die Widerstandsformel  $\rho = T\sigma[1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2]$ , die mit abnehmendem  $T$  in das Blochsche  $T^5$ -Gesetz mündet, andererseits durch den Klammerausdruck sich auch hohen Temperaturen anpaßt, genügt den Beobachtungen an den regulären Metallen Li, Na, Cu, Ag, Au, Al, Pb, W, Rh um so besser, je kleiner der Restwiderstand der Metallproben ist.

3. Die aus dem Widerstandsabfall ermittelte charakteristische Temperatur  $\Theta_r$  stimmt im ganzen gut mit der aus der spezifischen Wärme abgeleiteten  $\Theta_c$  überein. Eine erhebliche Differenz bei Na stützt die Simonsche Hypothese eines Quantensprungs in diesem Metall.

4. Platin und Palladium fügen sich der neuen Formel nicht. Es scheint, daß hier die ältere in das  $T^4$ -Gesetz mündende Formel besseres leistet.

1) Vgl. z. B. W. Meissner u. B. Voigt, a. a. O.

2) F. Simon, Berl. Ber. 33. S. 477. 1926. Nach Simon soll auch beim Kalium ein Quantensprung existieren, der sich im Gang der spez. Wärme bemerklich macht, nicht aber im Gang des Widerstands. Die Beobachtungen über den Widerstandsabfall des K (H. R. Woltjer u. H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden Nr. 173a. 1924) reichen nicht aus, um zu entscheiden, ob  $\Theta_r > \Theta_c$  (für eine einfache Debye-funktion) zu wählen ist. Ich sehe daher von einer Mitteilung der Rechnungen ab.

Marburg/L., Physikal. Institut, Dezember 1932.

(Eingegangen 3. Dezember 1932)

## **Prüfung der Röntgenfluoreszenz-K-Strahlung anisotroper Einkristalle auf Polarisaton**

**Von Max Groos**

(Mit 10 Figuren)

Auf Grund der Annahme, daß die Anisotropie gewisser Kristalle darauf zurückzuführen sei, daß die Elektronenhüllen der den Kristall aufbauenden Atome nicht kugelsymmetrisch sind, wurden verschiedene anisotrope Einkristalle auf die Polarisaton ihrer K-Fluoreszenzstrahlung untersucht.

Die auf photographischem Wege durchgeführte Untersuchung ergibt, daß bei  $\text{TiO}_2$ - und Zn-Einkristallen der gesuchte Effekt nicht vorhanden ist.

Das von Stark untersuchte  $\gamma$ - $\gamma$ -Dibrom-Anthracen erleidet durch die Röntgenstrahlen völlige Zersetzung, so daß die Voraussetzungen für das Auftreten des gesuchten Effekts nicht mehr gegeben sind. Trotz der Zersetzung durchgeführte Aufnahmen zeigen den Effekt nicht.

Das einwandfreie Arbeiten der Apparatur wird durch Kontrolluntersuchungen festgestellt.

### **Problemstellung und Prinzip der Versuchsanordnung**

1. Die starke Anisotropie mancher einatomiger Kristalle, z. B. des Zn, deutet darauf hin, daß die Elektronenschalen der einzelnen Zn-Atome im Kristall nicht kugelförmig und damit kugelsymmetrisch sind, und daß die Abweichung von der dichtesten Kugelpackung in einer etwa rotationsellipsoidischen Gestalt der Atome zu suchen ist.

Man kann zur Erklärung dieser Anisotropie mit Humerothery annehmen, daß das Zn-Atom im Kristallverband nur ein Elektron abgegeben hat, und daß das in der N-Schale verbleibende Elektron den Anlaß der Anisotropie bildet. Man kann aber auch fragen, ob die Anisotropie des Zn tiefer begründet und schon in den inneren Elektronenschalen merkbar ist. Die Antwort hierauf sollte durch Untersuchung der Röntgenstrahlung der betreffenden anisotropen Kristalle gegeben werden. Das Problem gewann nach Beginn der Arbeit noch an Bedeutung, als Joh. Stark(1\*) bei  $\gamma$ - $\gamma$ -Dibrom-Anthracen auf Grund verwandter Überlegungen und Vorstellungen eine ähnliche Anisotropie erwartete und auch in Gestalt der Polarisaton

\*) Die Literaturzusammenstellung befindet sich am Schluß der Arbeit.

der Röntgenfluoreszenzstrahlung des in den Kristall eingebauten Br tatsächlich fand. Danach schien die Annahme gerechtfertigt, daß infolge der Kopplung der verschiedenen Elektronenschalen untereinander auch für die inneren Elektronenschalen eine Vorzugsrichtung existiert, die sich wie z. B. bei Stark, bei der Verteilung der Intensität der emittierten Strahlung und als Polarisationsrichtung der von den inneren Schalen ausgesandten Strahlung bemerkbar machen könnte.

2. Um bei der Untersuchung jede durch die Versuchsbedingungen gegebene Vorzugsrichtung möglichst auszuschließen, wurde die zu untersuchende Röntgenstrahlung nicht durch Kathodenstrahlen, sondern als Röntgenfluoreszenzstrahlung angeregt. Und zwar empfahl sich, um die Ausbeute an Strahlung möglichst günstig zu gestalten, als anregende Strahlung eine charakteristische Strahlung, deren Wellenlänge der Anregungsgrenze der zu untersuchenden Substanz von kürzeren Wellen her möglichst benachbart war. Solche charakteristische Strahlung ist, wenn sie von einer gewöhnlichen polykristallinen Antikathode herrührt, nach den Untersuchungen von H. Mark und K. Wolf(2) nicht polarisiert.

Ein gewisser Teil der Fluoreszenzstrahlung wird unvermeidlich von dem teilweise polarisierten Bremsstrahlenuntergrund angeregt. Der dadurch möglicherweise bedingte Fehler ist zu vernachlässigen, da die Anregung durch Bremsstrahlen im Vergleich zur Anregung durch eine günstig gewählte charakteristische Strahlung eine sehr geringe Ausbeute ergibt.

3. J. Stark hatte in seiner Arbeit die Polarisation auf ionometrischem Wege festgestellt. Bei der vorliegenden Arbeit wurde die schon von H. Haga(3) benutzte photographische Methode angewandt in der von H. Mark und L. Szilard(4) verbesserten Form, bei der man zugleich eine spektrale Zerlegung und eine Analyse des Polarisationszustandes der untersuchten Strahlung erhält.

Die benutzte Versuchsanordnung ist in Fig. 1 skizziert. Die von der Röntgenröhre *R* kommenden primären Strahlen treffen auf ein aus der zu untersuchenden Substanz hergestelltes Präparat *Pr* und erregen darin die sekundäre Fluoreszenzstrahlung.

Diese fällt durch eine Blende *Bl* in die als Analysator benutzte Kamera. Sie trifft dort auf eine Streusubstanz *Str*, die sich auf dem schräg abgeschnittenen Ende der langsam rotierenden Achse *A* befindet und so gewählt ist, daß sie möglichst unter  $45^\circ$  eine Debye-Scherrer-Reflexion der zu analysierenden Wellenlänge gibt. Der in Fig. 1 angedeutete Fall, daß die sekundäre Strahlung polarisiert ist (elektrischer Vektor  $\vec{E}$

(Papierebene), würde sich darin ausprägen, daß auf einem zu dem Strahle und der Achse coaxialen zylindrischen Film *F* Linien entstehen, — als Durchschnitte des Filmzylinders mit

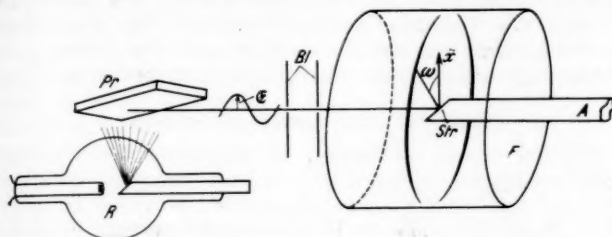


Fig. 1. Schematisches Bild der Versuchsanordnung

Debye-Scherrer-Kegeln — deren Schwärzung sich, wie in der Figur angedeutet, in charakteristischer Weise längs der Linie ändert.

4. Faßt man die Reflexion der Röntgenstrahlen, wie es auch Mark und Szilard getan haben, als Streuprozess an isotrop gebundenen Elektronen auf, deren Bindungsenergie jedoch zu vernachlässigen sein möge gegenüber der Energie der Strahlung, so kann man die Anschauungen der klassischen Elektrodynamik darauf anwenden. Es sei im folgenden speziell der in Fig. 1 angedeutete Fall zu Grunde gelegt, daß es sich um eine Reflexion unter  $45^\circ$  handelt, bei der also der sekundäre, vom Präparat *Pr* kommende Strahl auf dem gestreuten Strahl senkrecht steht. Bezeichnet man den in der zum sekundären Strahl senkrechten Ebene gemessenen Winkel zwischen Streustrahlrichtung und dem elektrischen Vektor  $\mathcal{E}$  der polarisierten Strahlen mit  $\omega$ , so gilt<sup>\*)</sup>: Unter dem Einfluß von  $\mathcal{E}$  erleidet ein als frei zu betrachtendes Elektron der Streusubstanz die Beschleunigung  $\ddot{x}$  in Richtung von  $\mathcal{E}$  und von der Größe:  $\ddot{x} = \frac{e\mathcal{E}}{m}$

( $\frac{e}{m}$  = spezif. Ladung des Elektrons). Infolge dieser Beschleunigung sendet das Elektron eine Strahlung aus, die in der Richtung, die mit  $\ddot{x}$  den Winkel  $\omega$  bildet, im Abstand  $r$  vom Elektron die Feldstärke

$$\mathcal{E}_\omega = \frac{\ddot{x}e}{rc^2} \sin \omega = \mathcal{E} \frac{e^2}{mrc^2} \sin \omega$$

hat. Diese Strahlung schwärzt nun den Film proportional der aufgefallenen Intensität, also auch proportional  $\mathcal{E}_\omega^2$  oder  $\sin^2 \omega$ , d. h. in Richtung von  $\mathcal{E}$  wird der Film nicht geschwärzt, senkrecht zu  $\mathcal{E}$  hat die Schwärzung ein Maximum, wie in Fig. 1.

Für den Fall, daß die Streuung nicht unter  $90^\circ$  gegen den sekundären Strahl erfolgt oder die Polarisation nicht voll-

<sup>\*)</sup> Vgl. z. B. A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien. Vieweg 1931. S. 25 ff.



ständig ist, verschwindet die Strahlung im Minimum nicht ganz und der Gegensatz zwischen Maximum und Minimum der Schwärzung wird geringer. *Daher ist nach Möglichkeit in jedem Fall die Streusubstanz so zu wählen, daß ihre Gitterkonstante eine Reflexion unter  $45^\circ$  erlaubt.* Die Feststellung der Polarisierung ist auf diese Weise auf die Messung des Schwärzungsverlaufs längs einer Linie zurückgeführt.

#### Wahl der Untersuchungssubstanzen

5. Nimmt man einmal an, die Anisotropie des einzelnen Atoms sei rotationsellipsoidisch, so kann man den erwarteten Effekt am Einkristall doch nur beobachten, wenn die Rotationsachsen dieser Ellipsoide im Kristallverband angenähert parallel zueinander stehen. Um das entscheiden zu können, muß man die Struktur des betreffenden Kristalls kennen, oder wenigstens, wie es bei der Starkschen Substanz der Fall ist, ziemlich eingehende Vorstellungen über den stereo-chemischen und kristallographischen Aufbau der Substanz haben.

Um die angeregte Röntgenstrahlung noch ohne Vakuum-Kamera beobachten zu können, darf man die Ordnungszahl der zu untersuchenden Substanz nicht niedriger als etwa 20 bis 22 wählen. Andererseits wird aber mit wachsender Ordnungszahl der Abstand zwischen der  $K$ -Schale, deren Strahlung man beobachtet, und der äußersten Schale, in der die Anisotropie ihr Maximum haben dürfte, immer größer und damit die Kopplung, von der eingangs die Rede war, immer geringer. Für kürzer werdende Wellenlängen wird es auch stets schwieriger, kräftige Reflexionen unter  $45^\circ$  zu erreichen, da man in der Bragg'schen Bedingung:  $\frac{n\lambda}{2d} = \sin 45^\circ$  für kleiner werdendes  $\lambda$  in der Wahl von  $d$  durch die Natur beschränkt ist und auch  $n$  nicht zu hoch wählen darf, um genügend intensive Reflexionen zu haben. Diese Forderungen schränken die Zahl der in Frage kommenden Substanzen stark ein und es wurden schließlich folgende Substanzen zur Untersuchung in Aussicht genommen:

- a)  $\text{TiO}_2$ ;    b) Zn;    c)  $\gamma$ - $\gamma$ -Dibrom-Anthracen.

6.  $\text{TiO}_2$  kristallisiert als Anatas im tetragonal-körperzentrierten System mit einem Achsenverhältnis  $\frac{c}{a} = 1,777$ . Jedes Ti-Atom hat in Anatas als Nachbarn 6 O-Atome; von diesen befinden sich 2 im Abstand  $d = 1,95 \text{ \AA}$  senkrecht unter und über ihm in Richtung der  $c$ -Achse (vgl. Fig. 2) und die



anderen 4 im Abstande  $d' = 1,90 \text{ \AA}$ , seitlich von ihm. Jedes O-Atom liegt zwischen 3 in derselben Ebene liegenden Ti-Atomen: 1 im Abstand  $d$ , 2 im Abstand  $d'$ . Die 6 das Ti umgebenden O-Atome bilden ein etwas deformiertes Oktaeder. Wollte man im Kristallgitter jedem Ti entsprechend der Formel  $\text{TiO}_2$  zwei O-Atome zuordnen, so kämen nur die beiden weiter entfernten O-Atome (Abstand  $d$ ) dafür in Frage. Alle diese „ $\text{TiO}_2$ -Moleküle“ liegen parallel zueinander und zur c-Achse im Kristall orientiert. Beim  $\text{TiO}_2$  als Rutil ist dies keineswegs der Fall. Verwandt wurden natürliche Anatas-Kristalle aus dem Binnental (Schweiz).

7. Beim Zn müßte man, um sein anisotropes Verhalten erklären zu können, annehmen, daß es aus ellipsoidischen Atomen aufgebaut ist, die mit ihrer größten Achse parallel der hexagonalen Achse des Zn orientiert sind. Verwandt wurden früher im hiesigen Institut gezüchtete Kristalle.

8. Bezüglich der mutmaßlichen Struktur des Dibromanthracens sei auf die Originalarbeit von Stark (1) verwiesen. Diese Substanz sollte noch einmal untersucht werden, um die Starkschen Resultate, die doch von erheblicher theoretischer Bedeutung sind, zu reproduzieren und daran die Leistungsfähigkeit der Apparatur zu prüfen. Aus käuflichem Dibrom-Anthracen (Kahlbaum) wurden aus Toluol Kristalle gezüchtet, die durchschnittlich 10 mm lang, 0,3 mm breit und 0,1 mm dick waren. Ähnlich wie bei Stark wurde durch paralleles Aufkleben einer großen Zahl dieser Kristalle (150 und mehr) auf ein ge-

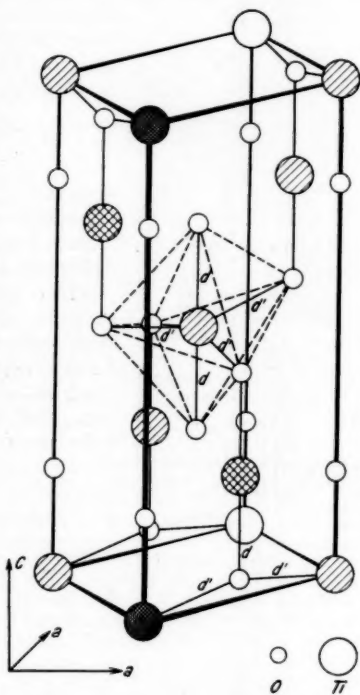


Fig. 2. Struktur von  $\text{TiO}_2$  (Anatas)



gegenüber befindet sich die Antikathode (A.K.). Sie ist gegen den Röhrenkörper *R* durch einen piecingedichteten Doppelschliff isoliert. Kathode, Röhrenkörper und Antikathode sind der größeren Belastbarkeit wegen wassergekühlt; die Kathode und der Röhrenkörper sind geerdet und liegen zur Kühlung hintereinander an der Wasserleitung. Die Antikathode steht mit einer hochspannungsisolierten Kühlpumpe in Verbindung. In der Mitte des Röhrenkörpers ist auf einer Seite der Pumpansatz *P* hart eingelötet und gegenüber die zylindrische Bleiblen-*de* *Bl* mit dem Strahlenaustrittsfenster aufgekittet. In Fig. 3 sind die einzelnen Teile der Blende etwas auseinander gerückt.

Der für die vorliegende Untersuchung wichtigste Teil der Röhre war die Kathode, von der Fig. 4 ein Bild gibt.

Ein wassergekühlter Kupferkörper *Cu* trägt auf seiner der Antikathode zugewandten Vorderfläche das zu bestrahlende Präparat *Pr* (vgl. auch Fig. 3), das mit dem dünnen Messingblech *M* festgeschraubt werden kann. Gegen die Wärmestrahlung des Glühdrahtes *G* ist das Präparat durch einen an dem gekühlten *Cu*-Körper befestigten Kupferstreifen *St* geschützt. Um zu erreichen, daß der Brennfleck dem Präparat möglichst direkt gegenüber auf der nur 4 bis 7 mm entfernten Antikathodenoberfläche *B* (vgl. auch Fig. 3) zu liegen kommt, ist ein Fokussierungsschieber *F.S.* (vgl. auch Fig. 3) angebracht, der durch eine Schraubenbefestigung der Antikathode mehr oder weniger genähert werden kann. Dadurch wird das Feld zwischen Kathode und Antikathode so deformiert, daß die Elektronen nach der Seite des Präparates abgelenkt werden und eine Verlagerung des Brennflecks in der gewünschten Richtung erreicht wird. Wie die Konstruktionszeichnung Fig. 3 erkennen läßt, ist sowohl die das Präparat tragende Kathoden-vorderfläche abgeschrägt, als auch die Blende *Bl* durch ein Zwischenstück schräg aufgesetzt. Das hat den Zweck, daß die Beobachtung des Präparates durch die Blende nicht allzu streifend geschieht, obwohl das Präparat vom Brennfleck aus unter möglichst großem räumlichen Winkel erscheint. Der durch die gegenseitige Verdrehung von Kathoden-vorderfläche und Blendenachse gegebene Winkel beträgt 24°.



Fig. 4. Die Kathode mit Befestigungsvorrichtung für die Präparate

Als Strahlenaustrittsfenster diente sehr dünne Cellophan-folie, da die verwandte Ti-Strahlung so weich ist, daß sie von 10  $\mu$  Aluminium bereits um etwa 50% geschwächt wird. Die Folie wurde nicht direkt auf die Röhre, sondern erst auf die Rückseite der Bleiblen-*de* aufgeklebt, um den Luftweg der Strahlung zu verkürzen und die Folie vor Zerstörung durch spontane Entladungen beim Inbetriebsetzen der Röhre zu schützen. Ein ganz dünner Zaponlack-Überzug nach A. Dau-

villier (7) machte die Folie gegen Luftfeuchtigkeit undurchlässig.

Die Antikathode war auswechselbar und in ihrer in den eigentlichen Röhrenkörper hineinragenden Länge durch eine pizeingedichtete Gewindeführung verstellbar. Dies war notwendig, da bei Ersatz des Glasisolierstückes nicht stets genau dieselbe Länge wieder angefertigt werden konnte. Verwandt wurden: eine Cr-Antikathode zur Anregung der Ti-Strahlung, eine Au-Antikathode, die mit ihrer L-Strahlung die K-Strahlung des Zn anregte, und eine W-Antikathode, die wie bei Stark die Bremsstrahlung zur Anregung der Br-K-Strahlung des Dibromanthracens liefern sollte.

10. Die Kamera (vgl. Fig. 5) bestand aus einem zylindrischen Messinggehäuse von 62 mm innerem Durchmesser, auf dieses war ein etwa 7 mm starker Pb-Mantel aufgegossen und dieser nach außen durch eine dünne Al-Wand geschützt. In die ebenfalls Pb-geschützte Vorderwand war koaxial eine Messingführung für die Blende eingesetzt. Die Blenden waren aus Blei, etwa 30 mm lang und hatten bei 18 mm Außendurchmesser Bohrungen von etwa 1—1,5 mm Weite. Auf der Rückseite konnte die Kamera durch einen Deckel verschraubt werden. Dieser trug das Uhrwerk, das den Stift mit der Streusubstanz, der ausgewechselt werden konnte, in langsame Umdrehungen, etwa 11 pro Stunde, versetzte.

11. Die Streusubstanz wurde als Pulver oder Blech aufgebracht. Für die Ti-K-Strahlung diente ein Pd-Blech, das bei einer Gitterkonstante von 3,88 Å die Wellenlänge Ti- $K_{\alpha}$  ( $\lambda = 2,74$  Å) an (200) unter  $40^{\circ}56'$  reflektiert. Für die Zn-K-Strahlung diente W-Pulver, das Zn- $K_{\alpha}$  ( $\lambda = 1,43$  Å) bei einer Gitterkonstante von 3,155 Å an (310) unter  $45^{\circ}47'$  reflektiert. Für die Br-Strahlung diente als Streusubstanz ebenfalls das Pd-Blech, das Br- $K_{\alpha}$  ( $\lambda = 1,04$  Å) an (333) unter  $44^{\circ}8'$  reflektiert.

Bei jeder Umdrehung der Streusubstanz wurde der Stromkreis eines Glühlämpchens automatisch für einige Sekunden geschlossen. Dadurch war der regelmäßige Gang des Uhrwerks vom Nebenzimmer aus zu überwachen und außerdem gab das Verlöschen des Glühlämpchens eine bestimmte Stellung des Streukörpers an, bei der im Falle etwaiger Unterbrechungen der Aufnahmen die Hochspannung der Röntgenröhre aus- oder eingeschaltet wurde.

12. In die Kamera, von der Fig. 5 ein Bild geben soll, paßten die ebenfalls zylindrischen Kassetten, von denen in Fig. 5 zwei verschiedene Exemplare wiedergegeben sind.

Sie bestanden im wesentlichen aus Rohren (Hartgummi oder Holz) mit einem seitlichen Schlitz, durch den der in schwarzes Papier geschlagene Film eingeführt werden konnte. Innen hatten die Kassetten oben und unten Führungsnuten, die für ein gutes Anliegen des Films an der Innenwandung der Kassetten sorgten. Meist wurde wegen der kürzeren Belichtungszeit die kleinere der beiden Kassetten von 30 und 56 mm Innendurchmesser verwandt. Der Film war dabei 35 bzw. 41 mm breit und 11 bzw. 17,5 cm lang. Zur Verwendung gelangten Agfa-Röntgen-Filme. Die Lage des Films zur Kassette war durch eine Lochungsvorrichtung markierbar, und jede Kassette hatte eine Aussparung, mit der sie auf einen Vorsprung in der Kamera paßte, so daß die gegenseitige Lage von Film, Kassette und Kamera stets reproduzierbar war. Dies war notwendig, da aus der Lage der Minima der Schwärzung auf dem Film auf die Lage der Polarisationssebene im Kristall geschlossen werden sollte.

Die Kamera wurde mittels der aus Fig. 5 ersichtlichen Vorrich-

tungen so gegen die Röntgenröhre justiert, daß sie sich mühelos auf die an der Röhre festgekittete Blende aufschieben ließ.

13. Die Hochvakuumanlage. Zur Evakuierung der Röhre diente eine 3-stufige Gaedediffusionspumpe aus Stahl mit überall mindestens 30 mm weiter Pumpleitung, Ausfriergefäß für den Hg-Dampf ( $\text{CO}_2$ -Alkoholbrei) und McLeodmanometer.

14. Die Hochspannungsanlage. Die erforderliche Hoch- und Heizspannung lieferte eine „Coolinan“-Apparatur der Elektrizitätsgesellschaft Sanitas. Da wegen der verschiedenen Kittstellen die Röhre nicht stark ausgeheizt werden konnte, war ein ruhiger Dauerbetrieb nur bis etwa 35 kV<sub>eff</sub> möglich, was jedoch für den vorliegenden Zweck völlig ausreichte. Die Belichtungszeiten waren sehr lang (12–140 Stunden), da eine Dauerbelastung der Röhre mit mehr als 800–1000 Watt nicht möglich war, ohne daß unzulässige Erwärmungen des Einankerumformers, des Transformators und anderer Apparateile auftraten.

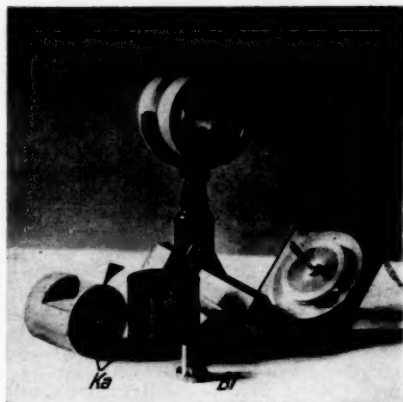


Fig. 5. Die Kamera mit Zubehör:  
D = Deckel mit Uhrwerk; Ka = Kassetten;  
Bl = Bleiblende

**Gang der Untersuchung**

15. *Herstellung der orientierten Kristallpräparate.* In der Annahme, daß die etwa vorhandene Polarisation der Röntgenfluoreszenzstrahlung der untersuchten anisotropen Kristalle parallel oder senkrecht zur Achse der Anisotropie jener Kristalle orientiert sein würde, wurden von  $\text{TiO}_2$  und Zn je 2 Präparate hergestellt in der Art, daß in dem einen jene Achse senkrecht zur Beobachtungsrichtung stand (Fig. 6a), während in dem anderen beide Richtungen parallel waren (Fig. 6b). Diese Präparate waren etwa 1,5 mm dick und so groß, daß sie den Öffnungswinkel der Blende ganz erfüllten. Damit die Achsenrichtung in die Beobachtungsrichtung fiel, war es notwendig, aus einem Einkristall das

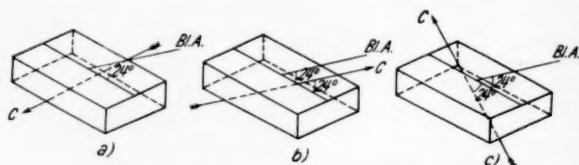


Fig. 6. Die Kristallpräparate (schematisch):  
B.L.A. = Blendenachse = Beobachtungsrichtung; C = Kristallachse

Präparat so herauszuschneiden, daß die Achse des Kristalls mit der Oberfläche des Präparates jenen Winkel von  $24^\circ$  bildete, wie Fig. 6b es zeigt.

Drehte man dieses Präparat in seiner Ebene um  $180^\circ$ , so erhielt man die Lage der Fig. 6c, bei der Kristallachse und Beobachtungsrichtung einen Winkel von  $2 \times 24^\circ = 48^\circ$  miteinander bildeten.

Da Stark (1) beim Dibrom-Anthracen festgestellt hatte, daß die Br-Fluoreszenzstrahlung in der Richtung der größten Ausdehnung der Kristallnadeln polarisiert ist, wurde von dieser Substanz nur ein Präparat nach Fig. 6a hergestellt.

16. *Die Aufnahmen.* Das zu untersuchende Präparat wurde auf die gekühlte Vorderfläche der Kathode gebracht und die Röhre einige Zeit evakuiert. War „Klebevakuum“ eingetreten, so wurde die Heizung des Glühfadens eingeschaltet und nach einigen Minuten Hochspannung angelegt, doch so, daß zunächst keine spontanen Entladungen in der Röhre auftraten. Nach kurzer Zeit wurde die Belastung der Röhre schrittweise so weit gesteigert, daß bei der in Aussicht genommenen Belastung ein völlig ruhiger, von spontanen Entladungen freier

Betrieb gewährleistet war. Dann erst wurde die Kassette mit dem Film in die justierte Kamera eingelegt und die Belichtung begonnen. Für die Aufnahmen von  $\text{TiO}_2$  ergaben sich Belichtungszeiten von 18 Stunden bei einer Belastung von durchschnittlich 25  $\text{kV}_{\text{eff}}$  und 10 mA, für die Aufnahmen von Zn 10 Stunden bei durchschnittlich 33  $\text{kV}_{\text{eff}}$  und 14 mA. Für die Anregung von Dibrom-Anthracen stand keine geeignete charakteristische Strahlung zur Verfügung. Da aber die Bremsstrahlerregung nicht so günstig und die Br-Strahlung photographisch viel weniger wirksam ist, als die Ti- und die Zn-Strahlung, ergaben sich sehr beträchtliche Belichtungszeiten, obwohl die Fluoreszenzstrahlung mit dem Leuchtschirm noch nachweisbar war.

Es kommt nämlich weiter hinzu, daß bei der härteren Strahlung höhere Ordnungen der Reflexion nötig sind, um die Ablenkung von  $90^\circ$  zu erzielen, als bei weicherer Strahlung. Mit steigender Ordnung der Reflexion nimmt aber die reflektierte Intensität ab. Daher wurde eine Aufnahme gemacht mit einer Belichtungszeit von 50 Stunden bei einer Belastung der Röhre mit 26  $\text{kV}_{\text{eff}}$  und 30 mA. Sie zeigte aber so schwache Linien, daß es wünschenswert erschien, eine neue Aufnahme mit 140 Stunden Belichtungszeit zu machen. Leider wurde zwischen beiden Aufnahmen das Dibrom-Anthracenpräparat, das zum Schutze gegen Verdampfung und Erhitzung in Al-Folie eingepackt war, nicht geöffnet. Es zeigte sich nämlich, daß nach der 2. Aufnahme die vorher goldgelben Dibrom-Anthracenkristalle an den Stellen, wo sie unter der Einwirkung der Röntgenstrahlen gestanden hatten, völlig schwarz geworden waren. Daher wurde von weiteren Aufnahmen abgesehen.

Ein Positiv einer Aufnahme der Fluoreszenzstrahlung des  $\text{TiO}_2$  zeigt Fig. 7, eine entsprechende Aufnahme von Zn zeigt Fig. 8. Die mit dem Pfeil bezeichnete Linie ist jeweils die unter  $45^\circ$  reflektierte K-Linie, an der die Polarisation in Folge der Ablenkung um  $90^\circ$  am deutlichsten zu Tage treten sollte. Wie man erkennt, ist keine wesentliche und vor allem keine periodische Schwankung der Intensität dieser Linie zu bemerken. Über die Aufnahme von Dibrom-Anthracen vgl. S. 556.

17. Die Auswertung der Aufnahmen von  $\text{TiO}_2$  und Zn. Es wurde zunächst durch Ausmessung und rechnerische z. T. auch graphische Auswertung der Aufnahmen festgestellt, daß es sich tatsächlich um die Fluoreszenzstrahlung und nicht etwa um die gestreute Strahlung der Antikathode handelte. Dann wurden von  $\text{TiO}_2$  und Zn je die besten Aufnahmen der den Figg. 6a—6c entsprechenden Orientierungen mit einem Registrierphotometer durchgemessen.\*) Die Photometrierung geschah in

\*) Für die Ausführung der Photometrierungen der 6 Aufnahmen möchte ich Hrn. Dr. Hochheim, Oppau, auch an dieser Stelle herzlich danken.



der Weise, daß die Schwärzung der mit dem Pfeil bezeichneten Linie (Figg. 7 u. 8) in Richtung des Pfeils gemessen wurde und daneben noch die Schwärzung des Filmschleiers dicht neben dieser Linie auf der mit dem Kreuz bezeichneten Seite (Figg. 7 u. 8). Die Schwärzung aller Filme war so gering, daß sie sicher im linearen Gebiet der Schwärzungskurve lag. Die



Fig. 7. Aufnahme der Fluoreszenzstrahlung des  $\text{TiO}_2$

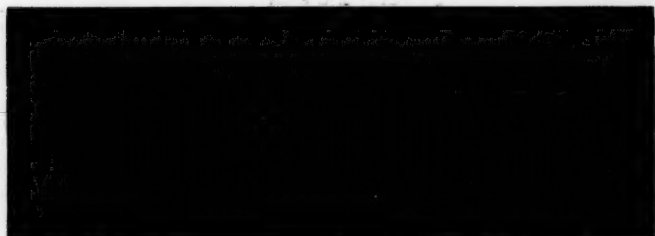


Fig. 8. Aufnahme der Fluoreszenzstrahlung des Zn

Photometrierung ergab die in Fig. 9a wiedergegebenen Kurven der Durchlässigkeiten (I Filmschleier, II Linienschwärzung), beide von der Nulllinie 0—0 aus zu rechnen.

Die Nulllinie für Fig. 9 b ist mit 0'—0' bezeichnet und die für Fig. 9 c ist auf der Figur nicht mehr zu sehen und noch entsprechend tiefer zu legen.

18. Die Auswertung ging nun in der Weise vor sich, daß die Photometerkurven auf durchsichtiges Millimeterpapier durchgezeichnet und derart bereinigt wurden, daß die kleineren durch die Korngröße der Röntgenfilme bedingten Zacken „ausgebügelt“



und größere, aber offensichtlich von Verunreinigungen und Beschädigungen des Films herrührende Zacken ebenfalls nicht berücksichtigt wurden. Diese Bereinigung geschah auch noch durch einen zweiten Beobachter und ergab Kurven der in Fig. 9 b dargestellten Art.

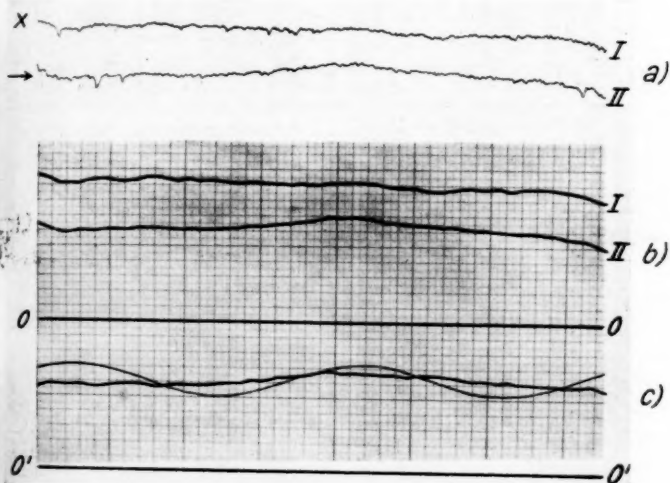


Fig. 9. Photometerkurven in den verschiedenen Stadien der Auswertung:  
I = Schleierschwärzung unmittelbar neben der Linie,  
II = Linienschwärzung

Die weitere Auswertung erfolgte nach H. Mark und K. Wolf (2):

An 65 über die ganze Filmlänge gleichmäßig verteilten Punkten wurden auf dem Millimeterpapier die Ordinaten der Linien- und der Schleierdurchlässigkeitskurven abgelesen. Als gültiger Wert wurde an jeder Stelle das Mittel der beiden unabhängigen Auswertungen genommen, die sich übrigens nur unwesentlich unterscheiden. Eine derartige Auswertung ist in Tab. 1 allerdings nur für 17 gleichmäßig über den Film verteilte Meßpunkte wiedergegeben. Spalte 1a und 2a enthalten die bereits gemittelten abgelesenen Durchlässigkeiten.

Von den Durchlässigkeitswerten einer Spalte wurde nun das Mittel gebildet und für jeden Meßpunkt die prozentuale Abweichung von diesem in Spalte 1b und 2b berechnet.

Die Korrektur der Liniendurchlässigkeit auf die vorhandene Schleierdurchlässigkeit geschah wie bei Mark und Wolf (2) in der Weise, daß in jedem Meßpunkt die prozentuale Abweichung der Schleierdurchlässigkeit

Tabelle 1

Schema einer Auswertung der Photometerkurven (17 Meßpunkte)

Lfd. Nr.  k	1		2		3	4	5
	a	b	a	b	Korrig. Linien- durchlässig- keit $J_k$	in Meßgenauig- keit in ‰	Mögl. Polarisation in ‰
	Schleier- durch- lässigkeit $J''_k$	Ab- weichung v. Mittel in ‰ $\Delta J''_k$	Linien- durch- lässigkeit $J'_k$	Ab- weichung v. Mittel in ‰ $\Delta J'_k$			
0	16,47	+2,7	13,78	+ 5,7	13,43	1,5	0,5
1	15,44	-3,7	12,74	- 2,3	,23	0,7	1,9
2	,73	-1,9	13,10	+ 0,5	,35	0,5	1,3
3	,75	-1,8	,07	+ 0,2	,31	0,0	1,7
4	16,24	+1,3	,46	+ 3,2	,30	0,4	1,0
5	,32	+1,8	12,96	- 0,7	12,73	0,6	1,2
6	,48	+2,7	13,36	+ 2,5	13,00	0,6	0,9
7	,79	+4,7	,48	+ 3,4	12,87	1,5	1,7
8	,81	+4,8	,66	+ 4,8	13,03	2,2	0,6
9	,48	+2,7	,40	+ 2,8	,04	Mittel	0,6
10	,20	+1,0	,36	+ 2,5	,23	0,9	1,5
11	,04	0	,30	+ 2,0	,30	—	3,1
12	,06	-0,1	,22	+ 1,4	,20	—	2,9
13	15,66	-2,4	12,57	- 3,6	12,88	—	1,3
14	,50	-3,4	,41	- 4,8	,85	—	1,9
15	,55	-3,1	,09	- 7,3	,49	—	3,2
16	14,67	-8,5	11,35	-13,0	,46	—	3,2

von der prozentualen Abweichung der Liniendurchlässigkeit abgezogen wurde. Eigentlich hätte die Differenz der Durchlässigkeiten selbst gebildet werden müssen, doch ist nach den Angaben von Mark und Wolf (2) der dadurch eingeführte Fehler nicht von wesentlicher Bedeutung, zumal die der Fig. 9a entsprechenden Kurven von vornherein keinen wesentlichen auf Polarisation deutenden Gang zeigten. Aus den so erhaltenen „korrigierten“ Prozentzahlen läßt sich die „korrigierte“ Liniendurchlässigkeit errechnen, deren Werte in Spalte 3 von Tab. 1 vereinigt und in Fig. 9c eingetragen sind.

Nach dem früher abgeleiteten Ergebnis müßte bei vorliegender Polarisation die Schwankung der Schwärzung proportional  $\sin^2 \omega$ , die Schwankung der Durchlässigkeit also proportional  $\cos^2 \omega$  sein, d. h. etwa den in Fig. 9c mit willkürlicher Amplitude als schwächere Kurve eingezeichneten Verlauf zeigen: In Meßpunkten, die um  $\frac{1}{4}$  Filmlänge gegeneinander versetzt sind, müßten verschiedene Durchlässigkeitswerte vorliegen, wenn die beiden Punkte nicht gerade symmetrisch zu einem Maximum oder Minimum liegen. Jedenfalls müßten die Absolutwerte der Durchlässigkeitsdifferenz solcher Punkte maximale Differenzen zeigen. In Punkten, die um eine halbe Film-

M. C.

läng  
vonkein  
vorh  
dies  
nich  
derfahr  
so h  
statt  
 $J_{k+}$   
 $J_{\perp}$   
 $J_{\perp}$   
trisc  
im vund  
so e  
der  
gen  
die

We

wer  
Dier  
zus  
fun  
inz  
sultFilm-Nr.  
Meß72  
75  
76  
80  
81  
82

länge gegeneinander versetzt sind, müßten auch bei Vorliegen von Polarisierung gleiche Durchlässigkeiten bestehen.

Wie in Fig. 9c die stark ausgezogene Kurve zeigt, kann keine Rede davon sein, daß eine  $\sin^2 \omega$  proportionale Schwärzung vorliegt. Es zeigt sich zwar eine Schwankung der Schwärzung, diese ist aber nicht periodisch und rührt daher, daß die Blende nicht genau axial gebohrt werden konnte, weil in dem Blei der dünne Bohrer leicht verläuft.

19. Um nun Kurve 9c rechnerisch auszuwerten, wurde so verfahren: Bezeichnet man die Durchlässigkeit im  $k$ -ten Meßpunkt mit  $J_k$ , so heißt „Versetztsein um die viertel bzw. halbe Filmlänge“, daß man statt  $J_k$  setzen soll:  $J_{k+4}$  bzw.  $J_{k+8}$  oder bei 65 Meßpunkten  $J_{k+16}$  bzw.  $J_{k+32}$ . Als Maß der Polarisation ist es üblich, den Ausdruck zu setzen:  $\frac{J_{\perp} - J_{\parallel}}{J_{\perp} + J_{\parallel}} \cdot 100$ , wobei  $J_{\perp}$  und  $J_{\parallel}$  sich auf die Richtung des elektrischen Vektors der polarisierten Strahlung beziehen. Analog wurde im vorliegenden Falle gebildet:

$$\frac{|J_k - J_{k+4}|}{J_k + J_{k+4}} \cdot 100 \quad \text{und} \quad \frac{|J_k - J_{k+8}|}{J_k + J_{k+8}} \cdot 100$$

und als „mögliche Polarisation“ bzw. „Meßgenauigkeit“ bezeichnet. Die so erhaltenen Werte sind in Spalte 4 und 5 von Tab. 1 vereinigt. Da bei der Bildung der Werte der „Polarisation“ der absolute Betrag der Differenz genommen wurde, mußte sich für die Punkte  $k, k+4, k+8, k+12$ , die jeweils um  $1/4$  Filmlänge gegeneinander versetzt sind, stets derselbe

Wert des Ausdrucks  $\frac{|J_k - J_{k+4}|}{J_k + J_{k+4}} \cdot 100$  ergeben. Als „Polarisations-

wert“ wurde daher der Mittelwert der bezeichneten Werte gebildet. Diese Polarisationswerte sind für die 6 ausgewerteten Filme in Tab. 2 zusammengestellt. Wie man aus dieser Tabelle ersieht, liegt die gefundene Polarisation beim Zn innerhalb der Fehlergrenze, was mit einem inzwischen veröffentlichten, auf ionometrischem Wege gewonnenen Resultate von Pardue und Mc Keehan (8) bestens übereinstimmt. Beim

Tabelle 2

Polarisationswerte (bei 65 Meßpunkten)

Film-Nr.	Meß- genauig- keit in %	Mögliche Polarisation bei $k =$															Orien- tierung der $c$ -Achse	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		15
72	1,5	0,9	1,3	1,5	1,1	1,3	1,6	1,9	2,0	1,6	1,5	1,5	1,8	1,8	1,2	0,9	0,6	I } $\text{TiO}_2$
75	0,7	1,6	0,7	0,8	1,2	1,3	1,5	1,5	1,3	1,4	1,2	1,6	2,2	2,4	1,9	1,6	1,5	
76	1,5	1,6	1,7	1,9	1,8	1,6	1,3	1,0	0,7	0,8	0,8	0,6	0,9	1,0	1,1	1,1	1,3	
80	2,0	1,8	1,5	1,4	1,6	1,5	1,3	1,5	1,5	1,4	1,2	1,2	1,2	1,1	1,3	1,3	1,7	II } $\text{Zn}$
81	1,0	0,7	0,7	0,9	0,8	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5	0,7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	
82	2,5	2,5	2,0	2,0	2,4	2,5	2,6	2,4	2,7	2,7	3,1	3,2	2,9	3,1	3,0	2,9	2,8	I }

36\*

TiO<sub>2</sub> scheint Film 75 eine Ausnahme zu machen, wo die Polarisation deutlich die Fehlergrenze überschreitet; doch ist in diesem Falle die Fehlergrenze gerade die kleinste aller Filme. Ein so grober Effekt von 16% Polarisation wie er nach Stark bei  $\gamma$ - $\gamma$  Dibrom-Anthracen bestehen soll, liegt jedenfalls auch für Film 75 nicht vor, so daß man wohl sagen kann, daß die von den untersuchten Einkristallen ausgehende Röntgenfluoreszenz-K-Strahlung unpolarisiert ist.

20. *Kontrolluntersuchung.* Da in allen Fällen keine Polarisation gefunden wurde, auch im Falle der Starkschen Substanz sicher nicht in dem von Stark gefundenen Maße — liegt der Einwand nahe, die angegebene Anordnung sei nicht in der Lage, die Polarisation nachzuweisen. Daher sollte mit derselben Kamera eine sicher polarisierte Strahlung aufgenommen werden. Dazu wurde der schon von Mark und Szilard(4) untersuchte Fall der Polarisation der Röntgenstrahlen durch Reflexion an Kristallen reproduziert: An einem Steinsalzkrystall reflektierte Strahlung einer abgeschmolzenen Röntgenröhre mit Cu-Antikathode gelangte durch die Blende in die Kamera und ergab, falls die Reflexion am Steinsalz unter annähernd 45° stattfand, die zu erwartende Schwankung der Linienintensität.

Bei einer anderen Aufnahme fand die Reflexion am Steinsalz unter etwa 23° statt. Entsprechend dem dadurch bedingten geringeren Polarisationsgrad (etwa 30%) verschwand bei dieser Aufnahme — im Gegensatz zur vorigen — die Linienschwärzung im Minimum nicht mehr ganz. Insgesamt hat diese Kontrolluntersuchung das einwandfreie Arbeiten der verwandten Kamera bestätigt.

21.  $\gamma$ - $\gamma$ -Dibrom-Anthracen. Wie bemerkt (Abschnitt 16), zersetzt sich das Dibrom-Anthracen unter der Einwirkung der Röntgenstrahlen. Das Zersetzungsprodukt ist tief schwarz gefärbt, hat aber, wie Fig. 10 zeigt, noch durchaus die äußere Form der unzersetzten Kristallnadeln. Irgendwelche gasförmigen Zersetzungsprodukte konnten nicht bemerkt werden.

Von der unzersetzten und der zersetzten Substanz wurden dann in einer gewöhnlichen Debye-Scherrer-Kamera nach W. M. Lehmann Aufnahmen gemacht. Während die unzersetzte Substanz nach einer Stunde bereits deutliche Linien ergab, waren



Fig. 10.  
Das zersetzte Dibrom-Anthracen-Präparat mit seiner Al-Hülle (nahezu natürliche Größe)

bei der zersetzten Substanz nach der 6-fachen Zeit kaum Linien zu erkennen. Damit ist festgestellt, daß durch die Zersetzung das Kristallgefüge der Substanz völlig zerstört wird; damit ist sie aber für die vorliegende Untersuchung wertlos, da ja das Kristallgefüge der wesentliche Grund zur Wahl des Dibrom-Anthracens war.

Bei den von mir gemachten Aufnahmen, die leider nicht reproduzierbar sind, da die eine zu schwach belichtet ist, und die andere durch ein Versehen im Entwicklerbad mit sichtbarem Licht nachbelichtet und dadurch so stark verschleiert ist, daß die Linien nur in der schrägen Aufsicht im reflektierten Licht deutlich sichtbar sind, zeigt sich nach dem übereinstimmenden Urteil mehrerer unbefangener Beurteiler keine Andeutung einer Polarisation. Nach der Zersetzung der Substanz war das auch nicht anders zu erwarten.

22. Um nun zu beurteilen, wie weit etwa auch die Ergebnisse Starks durch die Zersetzung der Substanz entstellt sein können, galt es, festzustellen, wie schnell die Zersetzung merklich wird, und ob sie auch in Luft eintritt und nicht nur im Vakuum. Dazu wurden folgende Versuche unternommen: Ein Präparat wurde wie die vorigen bei den Aufnahmen im Vakuum bestrahlt, an Stelle des sonst als Halterung dienenden Messingblechs (vgl. dazu Fig. 4) wurde ein Pb-Blech von 1 mm Stärke, das sonst aber die gleiche Form wie das Messingblech hatte, verwandt. Nach einer Belichtung von 5 Stunden bei 25 kV und 30 mA war bereits sehr deutlich sichtbare Zersetzung eingetreten. Der von den Röntgenstrahlen getroffene Teil der Substanz hob sich scharf begrenzt von der übrigen Substanz ab. Ein weiterer Zersetzungsversuch wurde mit einer abgeschmolzenen Müllerröhre durchgeführt. Die Substanz befand sich dabei außerhalb der Röntgenröhre und war etwa 4–5 cm von der Antikathode entfernt (gegen 4–5 mm beim 1. Versuch!). Sie war teilweise mit Pb-Blech von 1 mm Stärke bedeckt, so daß aus dem Gegensatz der geschützten und ungeschützten Stelle die Zersetzung deutlich wahrgenommen werden konnte. Die Müllerröhre hatte ebenfalls W-Antikathode und wurde bei 40 kV mit 20 mA betrieben. Da das Präparat bei diesem Versuch wesentlich weiter von der Antikathode entfernt war, war von vornherein mit einer längeren Belichtungsdauer bis zum Eintritt der Zersetzung zu rechnen. Nach 20 Stunden war jedoch einwandfreie Zersetzung durch Röntgenstrahlen zu bemerken.

23. Stark hatte bei seinen Versuchen Belastungen der Röhre mit 30–80 kV und 2,5–5 mA verwandt. Über die Gesamtzeitdauer der Belichtungen macht er in seiner Arbeit keine Angaben. Da er aber dieselben Präparate zunächst zu Untersuchungen über „die Axialität der Intensität“ und später zu Untersuchungen über die „Axialität der Polarisation“ verwandte, so ist die Vermutung nicht unberechtigt, daß auch bei den Starkschen Substanzen bereits teilweise Zersetzung eingetreten war. Da aber mit der Zersetzung der Grund zur Polarisation verschwindet, würde die von Stark gefundene Polarisation von 16% um so schwerer erklärlich sein. Allerdings gibt Stark zu, daß „der gesuchte Effekt an der Grenze der Leistungsfähigkeit der gewählten Methode“ liege. Er kam bei seinen Messungen darin zum Ausdruck,

daß zwei in Differentialschaltung geschaltete Ionisationskammern im Laufe von 15 Minuten eine Differenz der Ionisationen anzeigten, die 0,16 Skt. ausmachte. Über die Bedeutung und Beweiskraft seines Ergebnisses sagt Stark auf S. 661 seiner zitierten Arbeit: „Die grundsätzliche Bedeutung der an Dibrom-Anthracen-Kristallen beobachteten Erscheinung ist so groß, daß ich sie erst dann endgültig als real nachgewiesen erachten kann, wenn sie noch an weiteren Elementen festgestellt wird. Ich möchte daher die von mir gegebene Deutung meiner Beobachtungen nur mit dem Vorbehalt ihrer Bestätigung durch weitere Untersuchungen mitteilen“.

Insgesamt läßt sich wohl sagen, daß es bei der von Stark gewählten Substanz schwierig sein wird, einwandfreie Resultate zu erhalten. Steigert man nämlich die Intensität der Strahlung, so ist die Gefahr der Zersetzung zu groß, läßt man die Intensität der Strahlung aber so gering, daß die Zersetzung über eine längere Zeit vernachlässigt werden kann, so bleibt der Effekt in einer kaum nachweisbaren Größenordnung.

#### Ergebnisse und Folgerungen

24. a) Die Röntgenfluoreszenzstrahlungen aus  $\text{TiO}_2$ - und Zn-Einkristallen zeigen bei einer mittleren Fehlergrenze von 1,23% für  $\text{TiO}_2$  und 1,83% für Zn eine mögliche mittlere Polarisierung von 1,36% für die Ti- und von 1,56% für die Zn-Strahlung. Sie sind daher innerhalb der Fehlergrenzen als unpolarisiert anzusprechen. Der erwartete Effekt ist also bei der K-Schale nicht nachweisbar; das in anisotrope Kristalle, wie  $\text{TiO}_2$  und Zn, eingebaute Atom verhält sich bezüglich der Schwingungsebene der von ihm emittierten K-Strahlung isotrop. Ob der gesuchte Effekt bei weiter außenliegenden Schalen auftritt, ist von vornherein nicht zu sagen, und wegen der extremen Weichheit der von diesen Schalen emittierten Strahlung mit der benutzten Apparatur nicht zu entscheiden.

b) Das  $\gamma$ - $\gamma$ -Dibrom-Anthracen ist für die benutzte Untersuchungsmethode nicht brauchbar, da es von der intensiven Röntgenstrahlung in zu kurzer Zeit zersetzt wird. Mit der zersetzten Substanz durchgeführte Aufnahmen zeigen, wie zu erwarten, den gesuchten Effekt nicht. Wie weit die Starkschen Ergebnisse durch die Zersetzung der Untersuchungssubstanz berührt werden, läßt sich nicht übersehen, da die Angaben Starks dazu nicht ausführlich genug sind.

c) Kontrolluntersuchungen ergaben das einwandfreie Arbeiten der benutzten Apparatur. Es gelang, mit ihr die Polarisierung der Röntgenstrahlen durch Reflexion an Kristallen nachzuweisen. Der Nachweis der teilweisen Polarisierung wurde

auch erbracht für den Fall, daß der ankommende und reflektierte Strahl bei der Reflexion einen anderen Winkel als  $90^\circ$  einschließen.

Hrn. Professor Grüneisen bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein stetes Interesse bei der Durchführung dieser Untersuchung zu Dank verpflichtet. Die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und die Helmholtz-Gesellschaft haben wesentliche Teile der benutzten Apparatur zur Verfügung gestellt, wofür ihnen an dieser Stelle gedankt sei.

---

#### Literaturzusammenstellung

- 1) Joh. Stark, Ann. d. Phys. (5) **6**. S. 637. 1930.
- 2) J. Mark u. K. Wolf, ZS. f. Phys. **52**. S. 1. 1929.
- 3) H. Haga, Ann. d. Phys. **23**. S. 439. 1907.
- 4) H. Mark u. L. Szilard, ZS. f. Phys. **35**. S. 743. 1926.
- 5) D. Coster u. M. J. Druyvesteyn, ZS. f. Phys. **40**. S. 765. 1927.
- 6) E. Alexander u. A. Fäßler, ZS. f. Phys. **68**. S. 260. 1931.
- 7) A. Dauvillier, Compt. rend. **185**. S. 1460. 1927.
- 8) L. A. Pardue u. L. W. Mc Keehan, Phys. Rev. **37**. S. 329. 1931.

Marburg / Lahn, Physikalisches Institut der Universität,  
im September 1932.

(Eingegangen 25. November 1932)

---



**Reflexion und Sekundärstrahlung von Protonen  
beim Auftreffen auf feste Körper**

**Von C. Ramsauer und R. Kollath**

(Aus dem Forschungsinstitut der AEG.)

(Mit 5 Figuren)

Die vorliegenden Untersuchungen über das Verhalten fester Oberflächen gegenüber auftreffenden langsamen Protonen waren zunächst nicht als selbständige Arbeit gedacht, sondern als Hilfsversuche und Kontrollmessungen zu der unmittelbar folgenden Annalen-Arbeit „Über die Streuung von langsamen Protonen an Gasmolekülen“; sie hatten die Aufgabe, Reflexion und Sekundärstrahlung von langsamen Protonen beim Auftreffen auf feste Körper für unmittelbare Meßzwecke dieser Hauptuntersuchung festzustellen.<sup>1)</sup> Ihre speziellen Fragestellungen sind bei dieser Sachlage für sich allein genommen in verschiedener Richtung unvollständig, z. B. was die Vorbehandlung des Auftreffmaterials, die Geschwindigkeitsmessung der reflektierten Protonen und der ausgelösten Sekundärelektronen, die Variation des Auftreffwinkels usw. anbelangt. Wir glaubten trotzdem diese Versuche aus dem Zusammenhang der Hauptarbeit herausnehmen und ihnen einen besonderen Titel geben zu sollen, weil bisher keine derartigen Versuche mit homogenen Protonenstrahlen kleiner Geschwindigkeit vorliegen, vor allem aber, um den Interessenten auf diesem Gebiet das Auffinden der Arbeit zu erleichtern.

Es lassen sich folgende Fragen stellen:

1. Wieviel von 100 auf eine Messingfläche auftreffenden Protonen bestimmter Geschwindigkeit werden reflektiert? — Verhalten sich verschiedene Oberflächen hierbei merklich verschieden, d. h. gibt es gut und schlecht reflektierende Oberflächen?

<sup>1)</sup> Die Versuche der Hauptarbeit sollten nämlich in der Form erfolgen, daß die gestreuten Protonen auf einfachen Flächen aufgefangen wurden, da die Benutzung von Faradaykäfigen der ganzen Anordnung nach mit großen Schwierigkeiten verbunden gewesen wäre.



2. Welche Zahl von Sekundärelektronen wird von je einem auftreffenden Proton bestimmter Geschwindigkeit ausgelöst? — Verhalten sich hierbei verschiedene Materialien verschieden?

3. Welche Geschwindigkeiten haben die reflektierten Protonen und die ausgelösten Sekundärelektronen? — Diese Frage interessiert im Zusammenhang der vorliegenden Arbeit erst in zweiter Linie.

Eine Untersuchung dieser Fragen mit Protonen kleiner Geschwindigkeit als Primärstrahlen liegt bisher nicht vor. Es wurden entweder inhomogene Strahlen, die neben Protonen auch andere Ionen oder neutrale Teilchen enthielten, oder aber Alkali bzw. Hg-Ionen benutzt.<sup>1)</sup> Ein nur größenordnungsmäßiger Vergleich der Resultate verschiedener Autoren zeigt, daß die zahlenmäßigen Angaben über Reflexion und Sekundärstrahlung von langsamen Kanalstrahlen und über Reflexion und Sekundärstrahlung einiger anderer Ionenarten speziell im Punkte der pro Primärteilchen ausgelösten Anzahl von Sekundärelektronen weit auseinandergehen; ein Schluß auf das Verhalten langsamer Protonen läßt sich daher aus diesen Angaben nicht ziehen; wir waren also gezwungen, eigene Messungen anzustellen. Hierfür wurde die im folgenden beschriebene Apparatur und Meßmethodik benutzt.

Die Versuchsanordnung für die Messung der reflektierten Protonen und der ausgelösten Sekundärelektronen wurde möglichst einfach gewählt (Fig. 1), sie ist in ihrer Ausführungsform bis auf die Erzeugung und Homogenisierung der positiven Teilchen den früher von Füchtbauer<sup>1)</sup> und von Baerwald<sup>1)</sup> verwendeten Anordnungen ähnlich. Die Protonen werden an *Li* durch Elektronenbombardement vom Glühdraht *Gl* nach einer

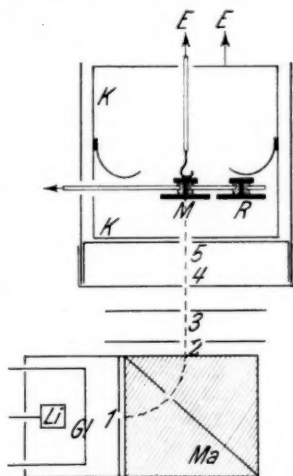


Fig. 1. Schema der Versuchsanordnung

1) Vgl. die Zusammenstellung im Handb. d. Phys. (Geiger-Scheel), Bd. 24, Kap. 2, III.

bereits früher benutzten Methode<sup>1)</sup> ausgelöst und auf Blende 1 zu beschleunigt. Im Feld eines Elektromagneten *Ma* werden sie um  $90^\circ$  nach oben abgelenkt, dadurch von anderen Ionenarten befreit und in bezug auf ihre Geschwindigkeit homogenisiert. Sie treten durch die Blenden 2—5 in den Meßraum ein; 2, 3, 4 sind dabei die eigentlichen Strahlbegrenzungsblenden, 5 ist genügend groß gewählt, damit der Protonenstrahl an den Blendenkanten nicht anstößt und dort also nicht Sekundärelektronen auslösen kann. Gegenüber der Blende 5 in 1 cm Abstand befindet sich ein beweglicher Halter für die zu untersuchenden Oberflächen. Auf ihm sind zwei Messingbleche befestigt, von denen das eine *M* mit einem Messer blank geschabt und das danebenliegende *R* mit einer gleichmäßigen Rußschicht überzogen ist. Jedes dieser beiden Bleche kann während der Messung vor die Blendenöffnung von 5 geschoben werden und ist dann gleichzeitig mit einem Elektrometer *E* durch einen Schleifkontakt verbunden; das gerade nicht vor der Öffnung stehende Blech ist durch eine entsprechende Feder mit der Wand des Innenraumes leitend verbunden. Dieser Innenraum, in dem sich die beiden Bleche befinden, ist als Faradaykäfig *K* ausgebildet, der ebenfalls an das Elektrometer angeschlossen werden kann; der den Auftreffblechen gegenüberliegende Teil von *K* (in Fig. 1 also der untere) ist inwendig berußt, um auftreffende Sekundärelektronen nach Möglichkeit festzuhalten.

Für die *Ausführung der Messung* denken wir uns die in Fig. 1 dargestellte Anordnung festgehalten, d. h. das blanke Messingblech *M* stehe vor der Öffnung der Blende 5, das berußte Messingblech *R* sei leitend mit dem Faradaykäfig *K* verbunden. Diesem Faradaykäfig *K* kann ein beliebiges positives oder negatives Potential gegenüber allen anderen vor der Messung auf dem Potential 0 gehaltenen Teilen gegeben werden, um Sekundärelektronen entweder auf *M* zurückzuhalten oder sie von *M* wegzuziehen. Solch ein Potential an *K* bewirkt zwar auf einem Teil des Protonenweges eine Veränderung der Geschwindigkeit des in den Käfig eintretenden Protonenstrahls, z. B. eine Verringerung der Geschwindigkeit, wenn (Fig. 1) die Blenden 4 und 5 sowie *M* das Potential 0, *K* dagegen das Potential + 10 Volt hat, es hat aber in dieser Form vor dem Anlegen eines Potentials an die Auffangplatte den Vorzug, daß die Strahlteilchen mit unveränderter Endgeschwindigkeit auf die Auffangplatte *M* auftreffen.

1) C. Ramsauer, R. Kollath u. D. Lilienthal, *Ann. d. Phys.* [5] 8. S. 702. 1931.

Ram

1. M

Teile

2. M

die u

eintr

Vers

durch

werd

relat

Plat

Käfig

Positive Aufladung von M

in

Prozent der Gesamtmenge

Auf

beis

ist

eint

tiver

sich

klein

ladu

eine

legu

Kur

Auf

beis

ist

eint

tiver

sich

klein

ladu

eine

legu

Kur

zeig

Ges

- Wir können jetzt zwei verschiedene Messungen vornehmen:
1.  $M$  und  $K$  zusammen mit dem Elektrometer verbunden, alle Teile der Apparatur vor der Messung auf dem Potential 0.
  2.  $M$  allein mit dem Elektrometer verbunden.

Im Fall 1 wird die gesamte Protonenmenge gemessen, die unter diesen Bedingungen durch Blende 5 in den Käfig  $K$  eintritt; diese gesamte eintretende Menge ist in allen folgenden Versuchen als Bezugswert gewählt und gleich 100 gesetzt (die durch Blende 5 wieder austretende Menge darf vernachlässigt werden, weil 5 klein und der Abstand zwischen  $M$  und 5 relativ groß ist).

Im Fall 2 bringen wir die Blenden 4 und 5 sowie die Platte  $M$  auf das Potential 0 und variieren das Potential des Käfigs  $K$ ;  $M$  liegt allein am Elektrometer. Wir messen die

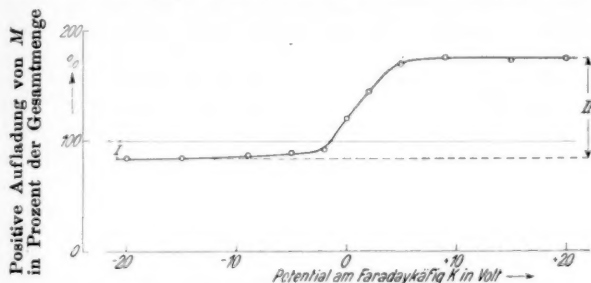


Fig. 2. Meßbeispiel (Elektronengeschwindigkeit 800 Volt)  
 I: reflektierte Protonen  
 II: ausgelöste Sekundärelektronen

Aufladung von  $M$  als Funktion des Potentials von  $K$  (Meßbeispiel in Fig. 2). Abszisse ist das Potential von  $K$ , Ordinate ist die Aufladung von  $M$  in Prozent der unter 1 definierten eintretenden Gesamtmenge. Steigert man allmählich, von negativen Potentialwerten kommend, das Potential an  $K$ , so ändert sich die Aufladung von  $M$  zunächst wenig und bleibt etwas kleiner als 100%. Bei etwa  $-10$  Volt beginnt dann die Aufladung zu steigen, um schließlich bei  $+7$  Volt sich wieder einem konstanten Endwert zu nähern. Eine eingehende Überlegung an Hand von Fig. 2 ergibt folgende Deutung dieses Kurvenverlaufs:

Die Horizontalität der Kurve zwischen  $-15$  und  $-20$  Volt zeigt, daß keine von den an  $M$  ausgelösten Sekundärelektronen Geschwindigkeiten zwischen 15 und 20 Volt haben. Geschwin-

digkeiten der Sekundärelektronen über 20 Volt sind aber nach eingehenden Messungen von Bärwald<sup>1)</sup> sehr unwahrscheinlich; bei Käfigpotentialen unterhalb  $-15$  Volt werden also alle Sekundärelektronen nach  $M$  zurückgetrieben, d. h. der Höhenunterschied  $I$  zwischen der Kurve und der  $100\%$ -Linie bei hohen negativen Potentialen ist als Prozentzahl der reflektierten Protonen zu deuten.

Die Horizontalität der Kurve zwischen  $+7$  und  $+20$  Volt zeigt, daß keine reflektierten Protonen mit Geschwindigkeiten zwischen  $7$  und  $20$  Volt vorhanden sind, die reflektierten Protonen haben also in ihrer überwiegenden Zahl entweder Geschwindigkeiten kleiner als  $7$  oder größer als  $20$  Volt.

Der Kurvenanstieg zwischen den beiden horizontalen Endstücken könnte entweder durch das immer stärker werdende Wegziehen der Sekundärelektronen von  $M$  oder aber durch das Festhalten langsamer reflektierter Protonen erklärt werden, deren Geschwindigkeit nach dem oben Gesagten unterhalb  $7$  Volt liegen müßte. Eine einwandfreie Entscheidung zwischen diesen beiden Möglichkeiten läßt sich nach den hier angestellten Versuchen nicht fällen. Da aber festgestellt worden ist, daß an festen Körpern reflektierte Wasserstoffkanalstrahlen zum größten Teil einen merkbaren Betrag ihrer Primärgeschwindigkeit behalten<sup>2)</sup>, haben wir in den folgenden Meßergebnissen die wahrscheinlichsten Werte angegeben, d. h. wir haben den gesamten Höhenunterschied  $II$  zwischen den beiden horizontalen Endstücken der Kurve den Sekundärelektronen zugeschrieben.<sup>3)</sup>

Ganz entsprechende Messungen werden mit der berußten Messingplatte  $R$  ausgeführt, die zu diesem Zweck an die Stelle von  $M$  vor die Öffnung der Blende  $5$  geschoben wird. Es wurden Kurven gleichen Charakters erhalten, wie in Fig. 2 für blankes Messing, ihre Auswertung geht in derselben Weise wie oben vor sich.

Bevor wir zur Besprechung der gesamten Meßergebnisse übergehen, muß bei genauerer Auswertung noch eine Erscheinung berücksichtigt werden. Die eben gegebene einfache Deutung der gemessenen Kurve in Fig. 2 kann nämlich nur als erste Annäherung angesehen werden. Sie beruht darauf, daß sowohl die an  $M$  reflektierten Protonen als auch die an  $M$  ausgelösten

1) H. Bärwald, *Ann. d. Phys.* **41**, S. 651. 1913 u. **60**, S. 1. 1919.

2) Vgl. z. B. E. Wagner, *Ann. d. Phys.* **41**, S. 209. 1913.

3) Die verbleibende Unsicherheit fällt nicht allzusehr ins Gewicht, weil  $II$  maximal um die Gesamtzahl aller reflektierten Protonen, also um  $I$  zu groß angegeben sein kann, falls nämlich alle reflektierten Protonen kleinere Geschwindigkeiten als  $7$  Volt haben würden.

Sekundärelektronen beim Auftreffen auf die Wände des Käfigs  $K$  100%ig festgehalten werden. Für die Sekundärelektronen ist dies wegen der Berührung der Wände in ausreichendem Maße der Fall; dagegen muß die Wirksamkeit der reflektierten Protonen weiter verfolgt werden. Dabei kommt es nicht so sehr auf eine zweite Reflexion der reflektierten Protonen an, da nach unseren Messungen dieser Bruchteil schon zu gering ist, sondern auf die von den reflektierten Protonen ausgelösten wesentlich zahlreicheren Sekundärelektronen, die bei negativen Potentialen an  $K$  nach  $M$  wandern und die positive Aufladung von  $M$  herabsetzen. Die Zahl der letzteren kann auf Grund der ebenfalls gemessenen Sekundärstrahlung von berußten Messingflächen ausgerechnet und damit die Aufladung von  $M$  korrigiert werden.<sup>1)</sup> Diese Korrektur bedeutet in Fig. 2 eine Höherlegung der gestrichelten Linie von 84 auf 89%, sie wirkt sich also nicht allein für die Zahl der reflektierten Protonen aus, sondern indirekt auch für die in Fig. 2 mit  $II$  bezeichnete Sekundärelektronenzahl, insofern nämlich, als sich der Höhenunterschied  $II$  bei einer Abnahme von  $I$  ebenfalls verkleinert.

#### Meßergebnisse

Die Messungen der im vorigen Abschnitt gezeigten Kurven mit variablem Potential an  $K$  wurden für Protonengeschwindigkeiten von 29, 175, 395, 800, 1505 Volt an Messing und an Ruß als Auftreffmaterialien durchgeführt; wir geben zwei charakteristische Beispiele: In Fig. 3 sind Meßreihen für kleine und große Protonengeschwindigkeiten an blankem Messing gegenübergestellt. Nach dem Auswertungsschema von Fig. 2 entnehmen wir der Fig. 3 die folgenden in Tab. 1 zusammengestellten unkorrigierten Meßwerte für Reflexion und Sekundärstrahlung:

Tabelle 1

Protonen- geschwindigkeit in Volt	reflektierte auftreffende Protonen in %	Sekundärelektronen	
		Proton in %	
29	~ 0	8	
1505	24	134	

1) Prinzipiell handelt es sich bei dieser Korrektur um die Summe einer unendlichen Reihe, die aber so rasch abklingt, daß praktisch die Berücksichtigung der ersten Glieder genügt.

In Fig. 4 ist das Verhalten von Messing (—) und Ruß (---) als Auftreffmaterial für gleiche Protonenprimärgeschwindigkeit

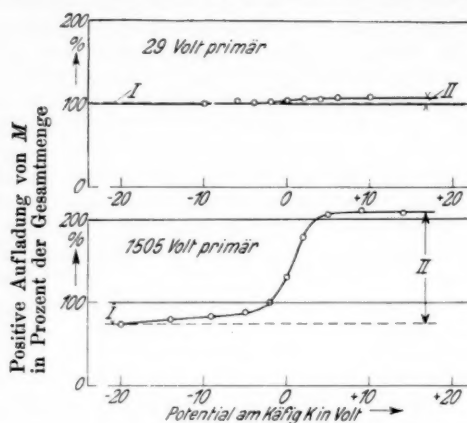


Fig. 3. Geschwindigkeitsabhängigkeit der Reflexion (I) und der Sekundärstrahlung (II) für Messing

(395 Volt) gegenübergestellt. Sowohl die Reflexion als auch die Sekundärstrahlung ist bei Ruß erheblich kleiner als bei Messing.

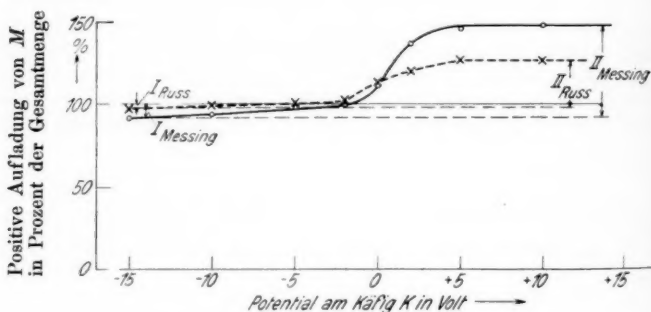


Fig. 4. Vergleich von Messing und Ruß bei gleicher Protonengeschwindigkeit (395 Volt)

In Tab. 2 ist das gesamte aus solchen Kurven gewonnene Versuchsmaterial zusammengestellt, alle Werte dieser Tabelle sind im Gegensatz zu Tab. 1 korrigiert auf die Auslösung von

Tabelle 2

Volt	Messing blank		Messing beruht	
	reflektierte Protonen	ausgelöste Sekundärelektronen	reflektierte Protonen	ausgelöste Sekundärelektronen
	in % der auftreff. Gesamtmenge		in % der auftreff. Gesamtmenge	
29	0	8	0	4
175	2,6	28,6	0,9	14,9
395	6,3	54,3	1,6	27,6
800	10,9	85,9	2,0	47,0
1505	13,8	123,8	3,4	73,4

Sekundärelektronen am Käfig K durch reflektierte Protonen (vgl. S. 564/65). Der größeren Anschaulichkeit wegen sind diese Zahlenwerte ferner in Fig. 5 graphisch aufgetragen: Über der Protonenlineargeschwindigkeit<sup>1)</sup> als Abszisse ist als Ordinate die Anzahl der reflektierten Protonen bzw. die Anzahl der Sekundärelektronen in Prozent der auf die Auffangplatte auftreffenden Gesamtmenge für Messing und Ruß als Auftreffmaterial dargestellt.

Die in dieser

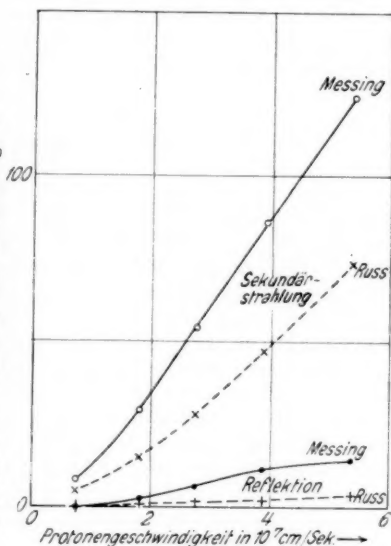


Fig. 5. Reflexion und Sekundärstrahlung von Protonen an Messing (—) und Ruß (---)

1) Diese Form der Auftragung ergibt eine bessere Übersicht über die Meßresultate und hat vielleicht darüber hinaus auch eine physikalische Bedeutung, da schon v. Issendorf darauf hinweist, daß die Lineargeschwindigkeit der auftreffenden Teilchen für die Größe der Sekundärstrahlung maßgebend sein könnte (Wiss. Veröff. Siemens IV, S. 124, 1925).

Arbeit gefundene Anzahl von ausgelösten Sekundärelektronen pro Proton liegt etwa in der Mitte zwischen den Werten von Baerwald und von einigen anderen Autoren. Für 300 Volt finden wir etwa 0,5 Elektronen/Proton, d. h. nur  $\frac{1}{4}$  des Wertes, den Baerwald<sup>1)</sup> für gemischte Wasserstoffkanalstrahlen bei gleicher Voltzahl gefunden hat. Man könnte danach vermuten, daß verschiedene Teilchenarten bei gleicher Voltgeschwindigkeit eine merkbar verschiedene Sekundärstrahlung hervorrufen. Einen erheblich kleineren Wert für die Sekundärstrahlung bei 300 Volt primär, nämlich 0,02—0,03 Sekundärelektronen pro auftreffendes Teilchen gibt jedoch Campbell<sup>2)</sup> an, der die positiven Strahlen aus einer dunkelrotglühenden Aluminiumphosphatanode auf Kupfer auffallen läßt, wobei es sich nach Campbell im wesentlichen um  $H^+$ - und  $H_2^+$ -Strahlen handelt. Ein über diese Größenordnungsbetrachtungen hinausgehender quantitativer Vergleich ist nicht möglich, solange keine Messungen von anderer Seite an einheitlichen Protonenstrahlen gleicher Geschwindigkeit vorliegen.

Zum Schluß sollen noch einige Versuche über die Reflexion von langsamen *Elektronen* kurz mitgeteilt werden, die im wesentlichen den Zweck hatten, durch Vergleich der Resultate mit einer früheren Untersuchung von Gehrts<sup>3)</sup> eine Kontrolle für das richtige Arbeiten der benutzten Apparatur zu liefern. Zu diesem Zweck wurde im unteren Teil von Fig. 1 die Protonenerzeugungsvorrichtung samt dem Magneten fortgenommen und durch eine Elektronenquelle ersetzt (Oxydkathode, Blendensystem). Die Messungen wurden für 4,6; 9,7 und 21 Volt Elektronenprimärgeschwindigkeit an Messing und Ruß in derselben Weise durchgeführt wie vorher die Messungen mit Protonen. Die gefundenen Zahlenwerte sind in Tab. 3 zusammengestellt. Die Übereinstimmung ist im Hinblick auf die wesentliche Verschiedenheit der benutzten Anordnungen befriedigend.

Tabelle 3

Volt	Ramsauer-Kollath		Gehrts			
	Messing (geschabt)	Ruß	Kupfer (Hochglanz poliert)	Aluminium (Hochglanz poliert)	Blei (gut poliert)	Ruß
4,6	59	16	66,6	54,8	64,7	10,6
9,7	62	16	64,7	54,6	60,0	12,5
21,0	92	26	94,8	78,0	84,8	20,6

1) H. Baerwald, vgl. S. 564, Anmerk. 1.

2) N. Campbell, *Phil. Mag.* **29**. S. 783. 1915.3) A. Gehrts, *Ann. d. Phys.* **36**. S. 995. 1911.



### Zusammenfassung

1. Es wird eine Versuchsanordnung beschrieben, bei der Protonen von 30—1500 Volt Geschwindigkeit auf feste Oberflächen auftreffen, wobei Messing und Ruß als Auftreffmaterial gewählt werden. Mit dieser Anordnung kann die Zahl der reflektierten Protonen und der ausgelösten Sekundärelektronen gemessen werden.

#### 2. Meßergebnisse:

a) Die Anzahl der reflektierten Protonen und der ausgelösten Sekundärelektronen steigt mit wachsender Geschwindigkeit der auftreffenden Protonen.

b) Die Anzahl der reflektierten Protonen und der ausgelösten Sekundärelektronen steigt erheblich beim Übergang von Ruß zu Messing als Auftreffmaterial.

c) Die Zahl der reflektierten Protonen ist wesentlich kleiner als die Zahl der ausgelösten Sekundärelektronen.

3. Die Anwendung der Methode auf Reflexion und Sekundärstrahlung von *Elektronen* gibt befriedigende Übereinstimmung mit früheren Resultaten von Gehrts.

Berlin-Reinickendorf.

(Eingegangen 7. Dezember 1932)

**Über die Streuung  
von langsamen Protonen an Gasmolekülen  
Von C. Ramsauer und R. Kollath**

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

(Mit 10 Figuren)

Nachdem die Streuung von Elektronen, also der negativen Elementarteilchen an neutralen Gasmolekülen weitgehend geklärt ist, haben wir uns die Aufgabe gestellt, die Streuung der positiven Elementarteilchen, also die Streuung von Protonen an neutralen Gasmolekülen zu untersuchen. Es zeigte sich, daß die für langsame Elektronen benutzte 11 Zonenapparatur<sup>1)</sup> mit einigen Änderungen, die den speziellen Verhältnissen des hier gestellten Problems angepaßt sind, auch die Streuung von langsamen Protonen zu messen gestattet. Die untersuchten Protonengeschwindigkeiten liegen zwischen 30 und 150 Volt.

#### Apparatur

Die benutzte 11 Zonenapparatur ist in Fig. 1 schematisch wiedergegeben, gegenüber der „Elektronenarbeit“ neu hinzugekommene Teile werden im folgenden besonders hervorgehoben. Statt des früher verwendeten Glühdrahtes ist hier eine Protonenerzeugungs- und Homogenisierungsvorrichtung eingebaut, wie sie bei Untersuchungen des Wirkungsquerschnitts von Gasmolekülen gegenüber Protonen gebraucht worden ist.<sup>2)</sup> Die Protonen werden an einer metallischen Lithiumfläche *Li* durch Beschießung mit Elektronen des Glühdrahtes *Gl* erzeugt und treten, auf 30 Volt beschleunigt, durch die Blende 1 in ein Magnetfeld *M* ein, dessen Kraftlinien senkrecht zur Zeichenebene stehen. Hier werden sie um 90° nach unten abgelenkt und durchlaufen zunächst die Blenden 2, 3, 4, 5, wobei sie je nach Wahl der Geschwindigkeit zwischen 2 und 3 weiter beschleunigt werden. Dann treten sie in den eigentlichen Streu-

1) C. Ramsauer u. R. Kollath, *Ann. d. Phys.* [5] **12**, S. 529. 1932, im folgenden kurz als „Elektronenarbeit“ zitiert.

2) C. Ramsauer, R. Kollath u. D. Lilienthal, *Ann. d. Phys.* [5] **8**, S. 709. 1931.

raum  $S$  ein und werden schließlich, soweit sie nicht seitlich gestreut werden, vom Auffangkäfig  $A$  aufgenommen. Um den Mittelpunkt von  $S$  herum sind die 11 Kugelzonen angeordnet, die einzeln oder zusammen mit einem Elektrometer verbunden werden können. Die Streuung erfolgt an den Molekülen des zu untersuchenden Gases, das mit beliebigem, mit einem Mc.Leod zu messendem Druck in den Streuraum eingeführt werden kann.

In Erweiterung der früheren Apparatur liegt vor den Zonen in etwa 1 mm Abstand ein kugelförmiges isoliertes Netz  $N$  aus  $\frac{1}{30}$  mm Golddraht (Maschenweite etwa  $1 \text{ mm}^2$ ), das von der Mittelzone 6 getragen wird. Dieses Netz hat zweierlei Funktionen: erstens soll eine Geschwindigkeitsanalyse der gestreuten Protonen durch Aufnahme von Gegenspannungskurven zwischen Netz und Zone ermöglicht werden; zweitens sollen bei Streumessungen durch Anlegung von beliebigen Potentialen zwischen Netz und Zone langsame geladene Teilchen, z. B. Ionen oder Sekundärelektronen in einer gewünschten Weise beeinflusst werden, ohne daß dadurch die Feldfreiheit des eigentlichen Streuraumes  $S$  gestört wird. — Wegen der Länge des Weges zwischen  $Li$  und  $S$  mußte durch Anbringung der kanalartigen „Druckblende“ 4 von 10 mm Länge und 2 mm Durchmesser dafür gesorgt werden, daß der Druck oberhalb der Druckblende wesentlich niedriger ist als im Streuraum. Das Gas gelangt durch den Auffangkäfig  $A$  in den Meßraum und tritt durch die Druckblende 4 in eine Glasglocke ein, unter der die ganze Anordnung steht; aus dieser Glocke wird

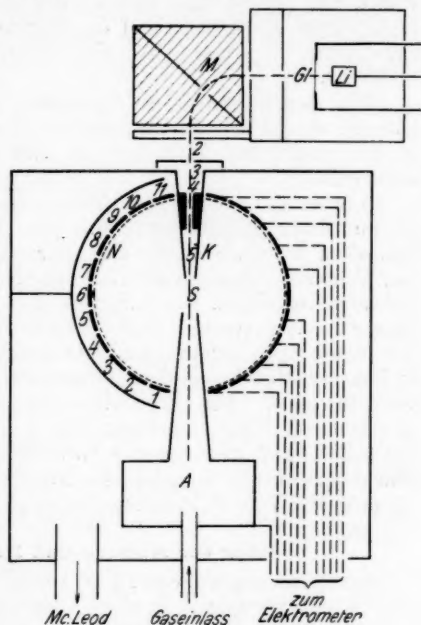


Fig. 1. Schema der Meßanordnung

aus dieser Glocke wird

das Gas durch zwei starke Pumpen möglichst schnell abgepumpt. So ließ sich ein Verhältnis der Gasdrucke innerhalb und außerhalb des Streuraumes  $S$  von 12:1 ohne Schwierigkeit aufrecht erhalten, wenn alle Fugen des Innenraumes gegen den Außenraum mit Bleistreifen gut abgedichtet wurden. Um eine Störung der Streumessungen durch solche Protonen zu verhindern, die an den Wänden der Druckblende 4 reflektiert sind, wurde im unteren Teil des Blendenkonus  $K$  die Blende 5 angebracht, die etwas größer als der Strahlquerschnitt an dieser Stelle ist.

Um den Gasdruck im Streuraum einwandfrei messen zu können, wurde das Zuleitungsrohr vom MacLeod direkt bis in den Innenraum hineingeführt und gegen den Außenraum abgedichtet.

Bevor wir auf die Ausführung der Messungen eingehen, sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß ebene Flächen, besonders wenn sie beruht sind, zur einwandfreien Auffangung von Protonen kleiner Geschwindigkeiten vollkommen genügen, daß also bei diesen Geschwindigkeiten Faradaykäfige als Auffänger nicht notwendig sind. Diese Frage wurde vor Beginn der Messungen geklärt, weil ein Umbau der Zonen-Flächen in Zonen-Käfige mit großen äußeren Schwierigkeiten verbunden gewesen wäre. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in der unmittelbar vorhergehenden Annalenarbeit niedergelegt. Sie zeigen, daß man bei den vorliegenden Streumessungen die Zonenapparatur in ihrer jetzigen Form ohne Bedenken zwischen 30 und 150 Volt Protonengeschwindigkeit benutzen darf.

#### Gang der Messung und Meßbeispiel

Gegenspannungskurven zwecks Geschwindigkeitsanalyse der auf die Zone gelangenden Strahlen

Blendenkonus  $K$ , Auffangkäfig  $A$  und Netz  $N$  liegen auf dem Potential Null, die Meßzone einschließlich des zugehörigen Elektrometers wird im Ausgangszustand auf das gewünschte Potential („Gegenspannung“) gebracht, alle übrigen Zonen befinden sich dauernd auf dem gleichen Potential.<sup>1)</sup> Die Aufladung der Meßzone wird als Funktion der angelegten Gegen-

1) Für Zone 6 muß hierbei eine Ausnahme gemacht werden, da diese Zone aus rein äußerlichen Gründen mit dem Netz leitend verbunden ist. Die Messung auf den beiden Nachbarzonen wird hierdurch etwas beeinträchtigt, worauf wir z. B. die von den sonstigen abweichende Form ihrer Gegenspannungskurven zurückführen. Ähnliche Verhältnisse liegen auch für die Zonen 1 und 11 wegen ihrer Nachbarschaft mit dem auf dem Potential 0 liegenden Blendenkonus bzw. Auffangkäfig vor.

aufgefangene Streumenge (relativ) ↑

aufgefangene Streumenge (relativ)

der resu

die der Ver von Null keit Ziff

Pot

spannung festgestellt, wobei die Einzelmessungen von Zeit zu Zeit auf einen Ausgangswert bezogen werden. Ferner muß wegen der Dampfdruckstände eine Differenzmessung im „Vakuum“ und bei Gasfüllung der Apparatur durchgeführt werden.

In Fig. 2 ist ein derartiges Meßbeispiel graphisch dargestellt. Die Differenz der Vakuum- und der experimentellen Argonkurve stellt die eigentliche Wirkung der Argonmoleküle dar. Diese korrigierte Gaskurve ist in Fig. 2 als  $\bullet\text{---}\bullet$  eingetragen, neben der direkt gemessenen Vakuum- ( $\circ\text{---}\circ$ ) und

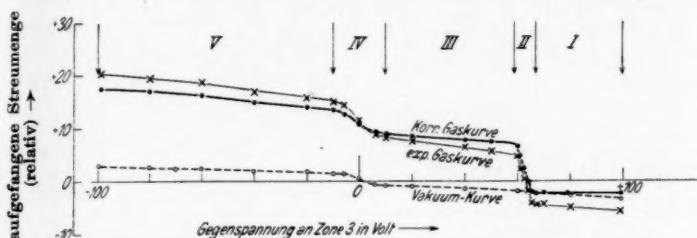


Fig. 2. Meßbeispiel für eine Gegenspannungskurve (Argon; Zone 3; 64 Volt primär)

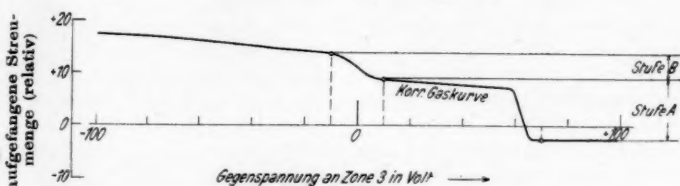


Fig. 2a. Definition der Stufen A und B

der exp. Argonkurve ( $\times\text{---}\times$ ). Bei der Darstellung der Meßresultate geben wir lediglich die korr. Gaskurven.

Auf Grund der Fig. 2 lassen sich einige Aussagen über die Art und Geschwindigkeit der Teilchen machen, die nach der Meßzone gelangen. Wir verfolgen zu diesem Zweck den Verlauf der Gegenspannungskurve von rechts nach links, d. h. von hohen positiven Gegenspannungen über die Gegenspannung Null zu hohen negativen Gegenspannungen. Der Übersichtlichkeit wegen haben wir die einzelnen Teile der Kurve mit den Ziffern I bis V bezeichnet:

I. Die konstante negative Aufladung bei hohen positiven Potentialen zeigt die Aufnahme von Sekundärelektronen an;

diese können entweder von Protonen bzw. schnellen Neutralatomen am Drahtnetz ausgelöst sein, oder aus Zusammenstößen der Protonen mit Gasmolekülen stammen. Daß diese Elektronen bei der hohen  $+$ -Spannung der Auffangzone zwischen 65 und 100 Volt in verhältnismäßig großer Menge angesaugt werden, ist nicht weiter verwunderlich. Elektronen, die an der Auffangzone selbst ausgelöst werden, bleiben infolge des angelegten Feldes der Zone erhalten.

*II.* Der scharfe Anstieg der Kurve bei etwa 64 Volt mit abnehmendem  $+$ -Potential ist ein Beweis für das Vorhandensein von solchen Protonen, die bei dem Streuprozeß keinen wesentlichen Anteil ihrer Primärenergie (etwa 64,5 Volt) verloren haben. Sie müssen an Gasmolekülen gestreut sein, da in der Vakuumkurve ein ähnlicher Abfall nicht einmal angedeutet ist. Der Ordinatenunterschied der korr. Gaskurve zwischen  $+10$  und  $+70$  Volt, also im wesentlichen die Höhe des Abfalls bei *II*, soll von jetzt an als Stufe *A* bezeichnet werden (Fig. 2a).

*IV.* Der nicht so steile, aber noch deutlich erkennbare Kurvenanstieg in der Nähe von 0 Volt deutet auf langsame positive oder negative Teilchen hin; der im negativen Kurvengebiet liegende Ast dieses Anstiegs ist auf die unter *I* erwähnten und auf die an der Meßzone ausgelösten Sekundärelektronen zurückzuführen. Zur vollständigen Erklärung dieses Anstiegs reichen aber, wie wir in den Meßergebnissen sehen werden, diese beiden Faktoren nicht aus, so daß wir auch auf das Vorhandensein langsamer positiver Ionen schließen müssen. Der Ordinatenunterschied der Gaskurve zwischen  $+10$  und  $-10$  Volt, also die Höhe des Abfalls bei *IV*, wird im folgenden als „Stufe *B*“ bezeichnet (Fig. 2a).

*III.* und *V.* In diesen beiden Kurvenstrecken steigt die positive Aufladung der Meßzone langsam an; wir wollen dahingestellt sein lassen, ob diesem Anstieg ein physikalischer Vorgang im Gasraum zugrunde liegt<sup>1)</sup> oder ob er rein geometrisch durch die Streuung der Felder hervorgerufen wird. Er tritt jedenfalls gegenüber dem charakteristischen Verhalten der Kurve in den Zweigen *II* und *IV* so merkbar zurück, daß er in diesem Zusammenhang kein weiteres Interesse bietet.

1) So könnte man z. B. bei dem langsamen Anstieg zwischen  $+60$  und  $+10$  Volt an Protonen denken, die mit verschiedenen Geschwindigkeitsverlusten gestreut sind, der Anstieg mit wachsender negativer Gegenspannung läßt sich als zunehmende Sekundärstrahlung der gestreuten Protonen an der Meßzonenoberfläche deuten, weil diese Protonen mit immer größerer Geschwindigkeit auftreten.

## Winkelverteilungskurven

Eine Winkelverteilungskurve, im folgenden kurz „Streu-  
kurve“ genannt, erhalten wir dadurch, daß wir die Aufladung  
der verschiedenen Zonen unter sonst gleichen Bedingungen be-  
stimmen und dann diese Aufladungen über den zu den ein-  
zelnen Zonen gehörigen, mittleren Streuwinkeln auftragen; auch  
hier wird der Dampfdruckstände wegen die Differenz aus Va-  
kuum- und Gasmessung gebildet. Die Streumessungen der  
vorliegenden Arbeit sind in einem Punkte merkbar kompli-  
zierter, als die der „Elektronenarbeit“, bei der unterhalb der  
Anregungsspannung der untersuchten Gase gearbeitet wurde.  
Während früher außer den elastisch reflektierten Elektronen  
keine Teilchen anderer Art und Geschwindigkeit im Meßraum  
auftreten, können jetzt neben den ohne wesentlichen Ge-  
schwindigkeitsverlust gestreuten Protonen noch Sekundärelek-  
tronen bzw. langsame Ionen vorhanden sein. Die Messung  
von Streukurven wird also nur dann zu verwertbaren Ergeb-  
nissen führen, wenn die Meßzone nicht einfach auf dem Po-  
tential Null liegt wie früher, sondern wenn sie auf bestimmte  
Gegenspannungen aufgeladen wird. Wollen wir z. B. in Fig. 2  
nur diejenigen Protonen bei der Streumessung erfassen, die  
ohne wesentlichen Geschwindigkeitsverlust an den Gasmolekülen  
gestreut sind, so müßten wir bei einer Primärgeschwindigkeit  
von 64 Volt die Aufladung der Meßzone oberhalb und unter-  
halb dieser Primärspannung an denjenigen Punkten feststellen,  
wo der Abfall *II* in die nahezu konstanten Zweige *I* und *III*  
übergeht. Hierbei tritt eine zweite Schwierigkeit gegenüber  
den Elektronenmessungen auf. Früher hatten die gestreuten  
Elektronen unter allen Streuwinkeln praktisch die gleiche Ge-  
schwindigkeit, während sich in der vorliegenden Untersuchung  
zeigte, daß die Geschwindigkeit der Streuprotonen eine Funktion  
des Streuwinkels ist. Wir müßten deswegen eigentlich, um  
einen einzelnen Meßpunkt zu erhalten, die ganze Gegen-  
spannungskurve aufnehmen, was bei Durchführung größerer  
Meßreihen nicht möglich ist. Wir haben uns daher aus den  
Ergebnissen der in Einzelfällen systematisch durchgemessenen  
Gegenspannungskurven (vgl. z. B. Fig. 2) folgende Meßregel ge-  
bildet: Wir wählen von vornherein für die Messungen an allen  
Zonen die untere und obere Gegenspannung so niedrig und  
so hoch, daß wir dieselben Werte für jeden Streuwinkel bei-  
behalten können. Bei einer Primärgeschwindigkeit von 64 Volt  
sind die benutzten Gegenspannungen z. B. + 10 und + 70 Volt.  
Außerdem hat dieses Vorgehen insofern eine gewisse Berech-  
tigung, als der Abfall der Gegenspannungskurve im Bereich *III*



Tabelle 1

Beispiel für die Messung einer Winkelverteilungskurve

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>		<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
Zone	Mittlerer Streu- winkel $\vartheta_m$	Aufladung der Meßzone in Skt/Sek		bei + 70 Volt	Rel. Zahl d. gestr. Prot. in Skt/Sek f. verschie- dene Zonen	Rel. Zahl d. gestr. Prot. pro Flächen- einheit = „Streu- kurve“
		bei + 10 Volt				
1	15°	+ 23,53		- 6,20	29,73	3,810
2	28	+ 3,69		- 4,30	7,99	0,262
3	43	+ 2,23		- 4,80	7,03	0,125
4	59	+ 1,44		- 4,39	5,83	0,079
5	74,5	+ 0,76		- 4,46	5,22	0,061
7	105,5	+ 0,29		- 2,26	2,55	0,028
8	121	+ 0,47		- 1,60	2,07	0,025
9	137	+ 0,00		- 0,47	0,47	0,007
10	152,5	+ 0,18		- 0,75	0,93	0,020
11	167,5	+ 0,06		- 0,70	0,76	0,029

(Fig. 2) verglichen mit demjenigen in II klein ist und sich wahrscheinlich rein geometrisch erklären läßt (vgl. die Diskussion der Gegenspannungskurven auf S. 574).

In Tab. 1 ist ein Beispiel für eine solche Messung der relativen Winkelverteilung wiedergegeben. Kolonne *a* und *b* enthalten die Zonenbezeichnungen und die mittleren Streuwinkel, die zu jeder Zone gehören.<sup>1)</sup> In Kolonne *c* werden für eine Gegenspannung von + 10 Volt die auf den einzelnen Zonen gemessenen Aufladegeschwindigkeiten des Elektrometers in Skt/Sek gegeben, soweit sie den Argonatomen allein zuzuschreiben sind, in Kolonne *d* die entsprechenden Werte bei einer Gegenspannung von + 70 Volt. Die Differenz dieser beiden Meßwerte (Kolonne *e*) können wir nach den obigen Ausführungen als die Differenz zwischen dem Anfangs- und dem Endwert des Kurvenzweiges II in Fig. 2 betrachten, d. h. als ein Maß für die Menge der gestreuten Protonen, deren Geschwindigkeit aus Gegenspannungskurven nach Art der Fig. 2 noch besonders zu bestimmen ist. Will man von diesen Werten, die die Streumengen für die verschiedenen Zonen darstellen, auf die pro *Flächeneinheit* gestreute Protonenmenge übergehen, so sind die Zahlenwerte von Kolonne *e* noch durch die zugehörigen

1) Über die Festlegung dieser mittleren Streuwinkel vgl. man die „Elektronenarbeit.“



Zonenflächen<sup>1)</sup> zu dividieren, wodurch Kolonne *f* erhalten wird. Die graphische Auftragung der Zahlenwerte von Kolonne *f* über dem Streuwinkel  $\vartheta$  ergibt die „Streu­kurve“, die in den Meßergebnissen mehrfach wieder­gegeben ist. Diese Kurve enthält die von uns ge­suchte Abhängigkeit der Streumenge vom Streu­winkel.

### Meßergebnisse und Diskussion Gegenspannungs­ kurven

Um eine vollstän­dige Übersicht über die Streuerscheinungen bei Protonen zu erhalten, müssen wir die Form der Gegenspannungs­kurven in Abhängigkeit von drei Größen stu­dieren, nämlich in Ab­hängigkeit vom Streu­winkel, von der Gasart und von der Primär­geschwindigkeit. Für diese drei Variations­möglichkeiten wird in den folgenden Versuchs­reihen je ein Beispiel gegeben.

Als erstes Beispiel zeigt Fig. 3 Gegen­spannungskurven in He­lium bei gleicher Pri­mär­geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Streu­winkel, dessen Größe

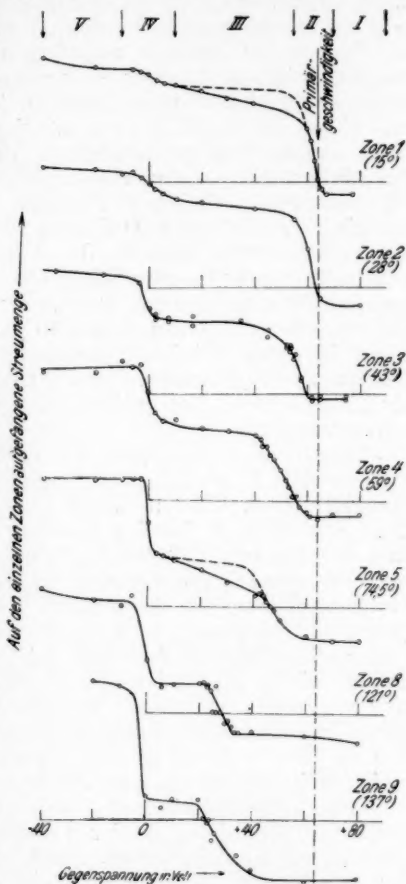


Fig. 3. Gegenspannungskurven gestreuter Protonen für verschiedene Streuwinkel (Helium; 64,5 Volt primär)

1) Dies gilt nur in erster Annäherung, genaueres über diese Umrechnung vgl. in der „Elektronenarbeit.“

(nebst Nummer der betreffenden Zone) rechts in den Kurvenbildern eingetragen ist. Abszisse ist in jeder Einzelkurve wie in Fig. 2 das Potential der Meßzone, das vor der Messung an diese angelegt wurde („Gegenspannung“), Ordinate ist die auf der Meßzone aufgefangene Gesamtladung. Die charakteristischen Abschnitte der Kurve sind für Zone 1 entsprechend Fig. 2 durch römische Ziffern (I—V) markiert. Außerdem ist die *Primärgeschwindigkeit* im obersten Bild durch einen Pfeil gekennzeichnet, dessen Abszissenlage in den übrigen Kurven durch eine punktierte Linie angedeutet ist. Um einen einfachen Vergleich der Kurvenformen zu ermöglichen, sind alle Ordinaten der Kurvenäste V auf etwa gleiche Höhe gebracht, die Absoluthöhen unterscheiden sich z. T. um außerordentlich große Beträge, was bei Besprechung der Streukurven klar werden wird. So waren z. B. die Intensitäten an den Zonen 10 und 11 bereits so klein, daß keine einwandfreien Messungen an ihnen mehr durchgeführt werden konnten, ferner zeigen die Versuchswerte für Zone 9 aus dem gleichen Grunde bereits wesentliche Schwankungen.

Fig. 3 zeigt einerseits die deutliche Wanderung des Kurvenabfalls II zu kleineren Abszissenwerten beim Übergang von Zone 1 zu Zone 9, wobei sich auch der Sprung von Zone 5 zu Zone 8 deutlich markiert. Andererseits tritt die Zahl der langsamen Teilchen (Ordinatendifferenz am Anfang und Ende von IV) gegenüber der Zahl der gestreuten Protonen (Ordinatendifferenz am Anfang und Ende von II) beim Übergang von Zone 1 zu Zone 9 prozentual immer stärker hervor. Das Kurvenstück III ist auch bei diesen Gegenspannungskurven, wie in Fig. 2, im wesentlichen horizontal, die scheinbare Ausnahme der Zonen 1 und 5 läßt sich geometrisch durch Inhomogenitäten des Gegenfeldes erklären (vgl. Anm. 1, S. 572). Der vermutliche Kurvenverlauf ohne diese Inhomogenitäten ist für die Zonen 1 und 5 gestrichelt miteingetragen.

Als zweites Beispiel geben wir in Fig. 4 *Gegenspannungskurven an Zone 2 bei gleicher Primärgeschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Gasart*. Auch hier sind die Ordinaten der Kurvenzweige V willkürlich auf etwa gleiche Höhe gebracht. Diese Versuchsreihe zeigt das außerordentlich verschiedenartige Verhalten der untersuchten Gase gegenüber langsamen Protonen. In Helium wird weitaus die Mehrzahl aller Protonen, die mit Gasmolekülen zusammenstoßen, ohne wesentlichen Energieverlust gestreut, langsame positive Teilchen bzw. Sekundärelektronen sind nur wenige vorhanden;

Ran

ähnlich  
über  
die  
lich

des

auf Zone 2 aufgetragene Strommenge

di  
ni  
m

na

ähnliches gilt von Argon. Im Gegensatz zu diesen Edelgasen überwiegt in Wasserstoff die Zahl der langsamen Teilchen die der schnellen schon merklich und in Methan sind schließlich überhaupt nur noch langsame Teilchen vorhanden.

Bemerkenswert an Fig. 4 ist ferner die Abszissenlage des mittleren Kurvenabfalles II, die in Helium, Argon und Wasserstoff durch einen Pfeil markiert ist. Die Lage dieser Pfeile weicht von der durch eine gestrichelte Linie bezeichneten, für alle Kurven gleichen Primärgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen in merkbar verschiedener Weise ab.

Als drittes Beispiel sind in Fig. 5 Gegenspannungskurven an Zone 3 in Argon in Abhängigkeit von der Primärgeschwindigkeit



Fig. 4. Gegenspannungskurven an Zone 2 (29°) in verschiedenen Gasen

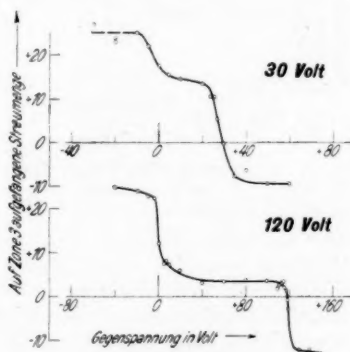


Fig. 5. Gegenspannungskurven an Zone 3 (43°) in Argon bei 30 und 120 Volt primär

digkeit aufgetragen. Die Zahl der langsamen Teilchen (Stufe B) nimmt relativ zur Zahl der schnell gestreuten Protonen (Stufe A) mit steigender Primärgeschwindigkeit zu.

**Diskussion.** Die Identität der Protonengeschwindigkeit nach der Lage des Kurvenastes II bei Zone 1 mit der ange-

wandten Primärgeschwindigkeit zeigt, daß es sich in diesem Falle um eine elastische Streuung handelt. Das gleiche könnte trotz der Differenz zwischen Reflexions- und Primärgeschwindigkeit auch von den übrigen Kurven gelten. Infolge des Massenverhältnisses von 1:4 zwischen den Stoßpartnern dürfen wir nämlich auch beim elastischen Stoß nicht unter allen Streuwinkeln eine der Primärgeschwindigkeit gleiche Reflexionsgeschwindigkeit erwarten, sondern diejenige Reflexionsgeschwindigkeit, welche sich als Funktion des Streuwinkels nach den bekannten Gesetzen des Stoßes zwischen elastischen Kugeln aus dem Massenverhältnis berechnen läßt. Um zu prüfen,

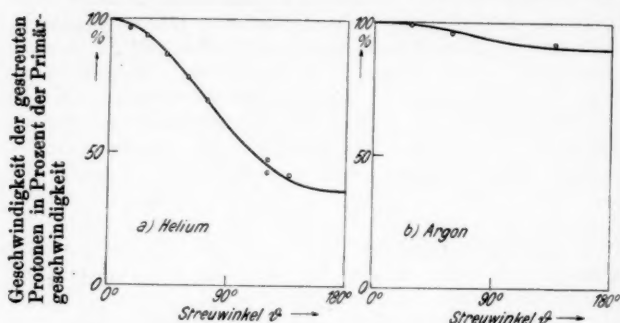


Fig. 6 a.

Fig. 6 b.

Geschwindigkeit der elastisch gestreuten Protonen  
experimentell:  $\circ \circ$ ; berechnet: —

wie weit die Streuung der Protonen an Gasmolekülen den Gesetzen des elastischen Stoßes tatsächlich unterliegt, haben wir in Fig. 6 a die Kurve der entsprechend dem Massenverhältnis 1:4 berechneten Reflexionsgeschwindigkeiten über dem Streuwinkel aufgetragen (—). In Fig. 6 a haben wir ferner die experimentell gefundenen Werte als Punkte ( $\circ \circ$ ) eingezeichnet, wobei als mittlere Geschwindigkeit der Streuprotonen diejenige Abszisse des Kurvenzweiges II gewählt wurde, bei der die gesamte Ordinatendifferenz zwischen den Abszissen +10 und +70 Volt gerade zur Hälfte durchlaufen ist. Wie Fig. 6 a zeigt, ergibt sich eine überraschend gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch. Wir haben also das Ergebnis erhalten: Die Streuung der Protonen an Heliumatomen bei einer Protonengeschwindigkeit von 64 Volt erfolgt, was die Reflexionsgeschwindigkeiten der Protonen anbelangt, nach

den Gesetzen des elastischen Stoßes. Fig. 6 b zeigt die entsprechenden experimentellen ( $\circ \circ$ ) und berechneten (—) Geschwindigkeiten für den Stoß zwischen Protonen und Argon-Atomen (Massenverhältnis 1:39). Auch hier besteht völlige Übereinstimmung, obgleich die Kurve entsprechend dem anderen Massenverhältnis von dem Bild bei Helium wesentlich verschieden ist.

Aus dem Gegensatz der Methankurve zu den Edelgas-kurven folgt, daß hier der Vorgang beim Zusammenstoß ein wesentlich anderer ist. Trotzdem liegt es bei dem völligen Zutreffen der elastischen Stoßgesetze für die Streuung des Protons an den Edelgasatomen nahe, auch in dem „edelgas-ähnlichen“ Methan wenigstens nach einer Andeutung elastischer Streuung, d. h. nach einer Andeutung der Stufe A der Edelgas-kurven im Verlauf der Methankurve zu suchen. Dieser Kurventeil fehlt zwar in der Methan-kurve der Fig. 4, er könnte aber vielleicht der Messung entgangen sein, da eine Belegung mit Meßpunkten nur in größeren Abständen stattgefunden hat. Wir haben daher diejenigen Stellen genauer unter-

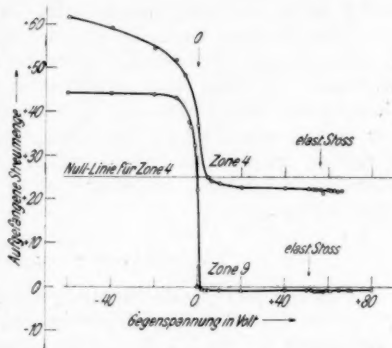


Fig. 7. Keine elastisch gestreuten Protonen in Methan

sucht, wo nach den Gesetzen des elastischen Stoßes der Kurvenanstieg II zu erwarten war. Wie Fig. 7 zeigt, ist aber sowohl die Gegenspannungskurve an Zone 4 als auch an Zone 9 bei den berechneten Gegenspannungen (Pfeile) völlig horizontal. Kein Zusammenstoß zwischen Protonen und Methan-molekülen führt also bei der hier untersuchten Protonen-geschwindigkeit zu einer elastischen Streuung des Protons.

Im Anschluß an diese Ergebnisse der Protonenstreuung an Methanmolekülen soll noch darauf hingewiesen werden, daß Wasserstoff in seinem Verhalten zwischen den Edelgasen und Methan steht, was für den Einzelfall der Zone 2 bereits aus Fig. 4 zu entnehmen war. Die Untersuchung weiterer Gegenspannungskurven in Wasserstoff zeigte, daß bei einer

Streurichtung von  $59^\circ$  (Zone 4) bestenfalls nur noch wenige Prozent der insgesamt stattfindenden Stöße zu elastischer Streuung führen, während für größere Streuwinkel genau wie in Methan innerhalb der Versuchsfehler keine Andeutung elastisch gestreuter Protonen gefunden werden konnte.

Wenn wir alle Vorgänge der Stufe *B* summarisch als „unelastische Stöße“ bezeichnen, so läßt sich unser Versuchsmaterial hierüber in folgende Aussagen zusammenfassen: Die unelastischen Stöße kommen auch bei Edelgasen neben elastischen Stößen vor. — Die Zahl der unelastischen Stöße steigt gegenüber derjenigen der elastischen Stöße bei Edelgasen mit wachsendem Streuwinkel und mit wachsender Protonengeschwindigkeit, welch letzteres mit unseren früheren Schlußfolgerungen in Einklang steht.<sup>1)</sup> — Bei Methan gibt es nur unelastische Stöße.

Die genauere Untersuchung der Natur dieser „unelastischen Vorgänge“ und speziell die quantitative Feststellung des prozentualen Anteiles der verschiedenen Stoßprozesse an der Gesamtzahl der überhaupt vorhandenen läßt sich jedoch mit der vorliegenden Apparatur nicht vornehmen und bleibt einer späteren Arbeit vorbehalten, welche unter anderem auch den eventuellen Einfluß schneller neutraler Teilchen berücksichtigen müßte.

#### Winkelverteilungskurven

Als Beispiel für die Messung der Winkelverteilung elastisch gestreuter Protonen geben wir in Fig. 8 Streukurven in Helium bzw. Argon bei 64,5 Volt Primärgeschwindigkeit. Als Abszisse sind entsprechend dem Meßbeispiel (Tab. 1) die mittleren Streuwinkel  $\vartheta_m$  (Kolonne *b*) aufgetragen, die zugehörigen Ordinaten sind aus den Versuchswerten auf demselben Wege errechnet, wie die Werte der Kolonne *f*. Die verschiedenen Punktbezeichnungen in beiden Figuren gehören verschiedenen Versuchsreihen zu. Bei der großen Ungleichheit der Ordinaten war es notwendig, den Kurvenverlauf für kleine Winkel gesondert darzustellen; der Maßstab der Nebenfiguren ist sowohl nach Ordinate wie nach Abszisse im Verhältnis 1:5 verkleinert. Wie schon im Meßbeispiel erwähnt wurde, handelt es sich bei diesen Messungen um *relative* Winkelverteilungen, die Absoluthöhen beider Figuren sind also willkürlich gewählt (gemeinsamer Bezugspunkt bei  $75^\circ$ ) und nicht miteinander vergleichbar.

1) *Ann. d. Phys.* [5] 8. S. 732. 1931.

In beiden Edelgasen zeigen die Winkelverteilungskurven im großen und ganzen einen monotonen Abfall mit wachsendem Streuwinkel, wobei die sehr starke Streuung unter kleinen Streuwinkeln besonders bemerkenswert ist.

Denkbar ist nach der Lage der Meßpunkte in Fig. 8 übrigens auch eine andere graphische Interpretation besonders bei größeren Streuwinkeln, indem man den hier schwach angedeuteten Wellenzug als reell annimmt. Eine Entscheidung

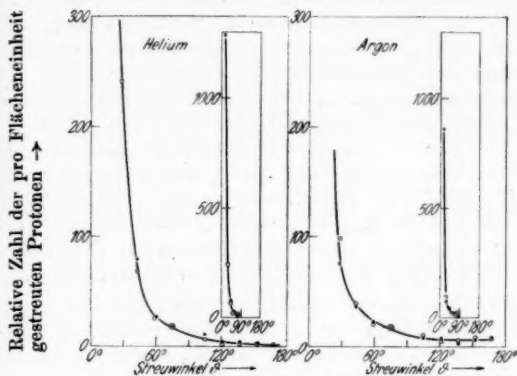


Fig. 8. Winkelverteilungskurven elastisch gestreuter Protonen (64,5 Volt primär)

wäre nur durch eine wesentlich engere Belegung der Kurven mit Meßpunkten zu treffen, wie sie bei unserer Zonenapparatur in der vorliegenden Form nicht möglich war.

*Diskussion.* Schon bei der Diskussion der Gegenspannungskurven war die Frage aufgetreten, wieviele der überhaupt stattfindenden Zusammenstöße zwischen Protonen und Heliumatomen zu einer elastischen Streuung des Protons führen. Um einen Einblick in diese Frage zu gewinnen, haben wir einerseits die gesamte auf den Zonen aufgefangene Streumenge bestimmt, andererseits haben wir aus dem Wirkungsquerschnitt von Helium gegenüber Protonen von 65 Volt Geschwindigkeit<sup>1)</sup> und aus den Versuchsbedingungen der Zonenapparatur die Gesamtzahl derjenigen Protonen im absoluten Maß berechnet, die in irgendeiner Weise beeinflußt werden. Bei diesem Ver-

1) C. Ramsauer, R. Kollath u. D. Lilienthal, Ann. d. Phys. 8. [5] S. 709. 1931.



gleich muß man neben der nicht genau bekannten Länge der „effektiven Streustrecke“ zwischen Blendenkonus und Auffangkäfig auch berücksichtigen, in welchem Maße bei der Wirkungsquerschnitts- und bei der Zonenapparatur die unter kleinen Winkeln gestreuten Protonen von der Messung erfaßt werden. Wir erhalten bei einem Druck von  $425 \cdot 10^{-4}$  mm Hg, einem Wirkungsquerschnitt von  $3 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$ , der „effektiven“ Streustrecke von 14 mm und bei einer Primärmenge von  $100 \cdot 10^{-12}$  Coulomb/sec für die Ladung der insgesamt beeinflussten Protonen den Wert  $30,6 \cdot 10^{-12}$  Coulomb/sec. Unter den gleichen Bedingungen erhalten wir für die Ladung der elastisch gestreuten Protonen den Wert  $29,5 \cdot 10^{-12}$  Coulomb/sec, wenn wir über alle Zonen summieren und dabei die Zwischenräume zwischen den Zonen und die nicht von der Messung erfaßte Zone 6 unter Abzug der Netzfläche berücksichtigen. Die fast völlige Übereinstimmung dieser Werte ist reiner Zufall, da wir mit einer Unsicherheit von  $\pm 25\%$  sicher rechnen müssen. Der Vergleich der beiden Zahlen berechtigt uns aber zu der Folgerung, daß die überwiegende Mehrzahl der überhaupt beeinflussten Protonen elastisch gestreut wird.

Zu einem ähnlichen Resultat führt auch eine andere Überlegung, bei der die Gegenspannungskurven der Fig. 3 mit den Streukurven der Fig. 8 kombiniert werden: Unter der Annahme, daß alle Teilchen der Stufe *B* von Prozessen im Gasraum<sup>1)</sup> herrühren und daß die Anzahl dieser Prozesse mit der Zahl der aufgefangenen Teilchen identisch ist, läßt sich die Zahl dieser Prozesse (Stufe *B*) im Verhältnis zur Zahl der elastisch gestreuten Protonen (Stufe *A*) errechnen, indem man die relative Zahl der elastischen Streuprozesse für die verschiedenen Winkel aus der Streukurve der Fig. 8 entnimmt. Man darf sich bei Betrachtung der Fig. 3 nicht durch die *relativ* großen Mengen langsamer Teilchen bei größeren Streuwinkeln zu einer Überschätzung ihrer *absoluten* Menge verleiten lassen, weil die Gesamtmengen, die bei größeren Streuwinkeln auf den Zonen aufgefangen werden, sehr klein sind gegenüber denjenigen bei kleinen Streuwinkeln. Die Ausrechnung liefert das Resultat,

1) Im Prinzip kommen auch die an der Auffangfläche durch Protonen ausgelösten Sekundärelektronen in Betracht, für deren Menge die vorhergehende Arbeit bei einer Protonengeschwindigkeit von 65 Volt ungefähr 8% der Protonenanzahl angibt. Wir müßten also in den Kurven der Fig. 3 die Höhe der Stufe *B* um diesen Betrag vermindert denken, was die Form der Gegenspannungskurve an den Zonen 1 und 2 noch merklich, die Form der Gegenspannungskurve an den übrigen Zonen kaum noch beeinflußt.



das etwa 85%, d. h. die überwiegende Mehrzahl der auf den Zonen aufgefangenen Teilchen elastisch gestreut sind. Die beiden hier durchgeführten Versuche einer absoluten Auswertung der Meßergebnisse führen also zu dem gleichen Resultat.

Will man die Winkelverteilungen der Protonen in Helium und Argon miteinander oder mit Elektronenstreu曲ven vergleichen, so ist die Darstellung der Fig. 8 nicht sehr günstig. Die vorliegenden Winkelverteilungskurven entsprechen nämlich der Bedingung, daß der Beobachter sich an dem Ort des anfangs ruhenden Atoms befindet. Besonders einfache Beziehungen liegen aber bekanntlich beim Stoß elastischer Kugeln dann vor, wenn der Beobachtungsort in den gemeinsamen

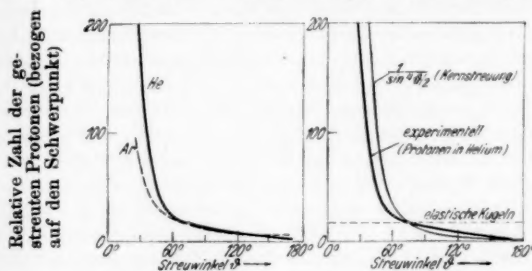


Fig. 9. Reduzierte Winkelverteilung (64,5 Volt primär)

Fig. 10. Vergleich der experimentellen Streukurve mit der für Kernstreuung bzw. elastische Kugeln berechneten

Schwerpunkt der beiden Stoßpartner verlegt wird. Eine solche Umrechnung, d. h. die Reduktion der Streukurven auf ruhenden Schwerpunkt, führt zu der Darstellung der Fig. 9.<sup>1)</sup> Durch

1) Die Reduktion auf ruhenden Schwerpunkt wurde in bekannter Weise durchgeführt durch Multiplikation der Kurvenordinaten mit:

$$\frac{M \cdot \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \vartheta}}{(m \cos \vartheta + \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \vartheta})^2},$$

wobei bedeutet:  $m$  bzw.  $M$  Masse des Protons bzw. Moleküls,  $\vartheta$  Streuwinkel gegen die Richtung der ankommenden Protonen, gesehen vom anfangs ruhenden Molekül.

Es erschien uns dabei nicht angebracht, auch die Geschwindigkeit des Protons auf den Schwerpunkt zu beziehen, weil bei dem physikalischen Vorgang des Zusammenstoßes die Relativgeschwindigkeit der Stoßpartner gegeneinander, also praktisch die Anfangsgeschwindigkeit des Protons maßgebend sein muß.

die Umrechnung haben sich die beiden Kurven genähert, sie unterscheiden sich aber trotzdem noch merklich voneinander, die Heliumkurve fällt im ganzen steiler ab als die Argonkurve.

Es soll ferner versucht werden, die experimentell gefundene Heliumkurve zur Streukurve des Stoßes elastischer Kugeln und zur Streukurve für reine Kernstreuung (Rutherford) in Beziehung zu bringen. Diese drei Kurven sind deshalb in Fig. 10 zusammen aufgetragen: Für die Streuung der Protonen an Heliumatomen ist, wie man sieht, weder der Stoß elastischer Kugeln, noch reine Kernstreuung anzunehmen; das gleiche gilt von der Argonkurve.

Die starken Abweichungen der für die Streuung von Protonen an Helium- und Argonatomen gemessenen Winkelverteilung von der Gleichverteilung, die für den Stoß elastischer Kugeln gilt, könnte im ersten Augenblick überraschen, nachdem im vorhergehenden Abschnitt eine *völlige Übereinstimmung* zwischen der gemessenen und der für elastische Kugeln berechneten Geschwindigkeitsabhängigkeit der gestreuten Protonen vom Streuwinkel festgestellt worden war (Fig. 6a, b). Tatsächlich hat aber dieser Befund im wesentlichen nur die mehr negative Bedeutung, daß die kinetische Energie der Stoßpartner erhalten bleibt, daß also keine Energie für sonstige Vorgänge verbraucht wird. Es handelt sich hier um eine ganz ähnliche Erscheinung, wie bei der Streuung der Elektronen, deren Energie unterhalb der Anregungsspannung des untersuchten Gases liegt. Auch dort haben wir „elastischen Stoß“, d. h. Beibehaltung der kinetischen Energie der Stoßpartner, und daneben eine Streukurve, die mit dem Stoß elastischer Kugeln nichts zu tun hat, sondern mit den individuellen Eigenschaften des Atoms einerseits und der Wellennatur des Elektrons andererseits zusammenhängt.

#### Zusammenfassung

1. Die Methode der 11-Zonenapparatur, welche in einer früheren Arbeit zur Messung der Elektronenstreuung in Gasen benutzt wurde, läßt sich mit einigen Abänderungen auch auf die Streuung von Protonen an Gasmolekülen anwenden; hervorgehoben sei der Einbau eines Netzes vor den Zonen, wodurch die hier notwendig werdende Geschwindigkeitsanalyse der aufgefangenen Teilchen möglich wird.

2. Untersucht wurden die Gase He, Ar,  $H_2$ ,  $CH_4$  in einem Geschwindigkeitsbereich von 30—120 Volt und in einem Streuwinkelbereich von 15—167° mit Hilfe von Gegenspannungs- und Winkelverteilungskurven.

3. Die Gegenspannungskurven in Helium und Argon zeigen in ausgeprägter Form das Vorhandensein zweier völlig getrennter Gruppen von aufgefangenen Teilchen an, solche von nur wenigen Volt Geschwindigkeit und solche von großer Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der schnellen Teilchen sinkt bei Argon und besonders bei Helium mit wachsendem Streuwinkel. Die Zahl der schnellen Teilchen sinkt im Vergleich zur Zahl der langsamen Teilchen mit steigender Protonengeschwindigkeit und mit steigendem Streuwinkel.

Die Gegenspannungskurven in Methan zeigen nur eine Teilchengruppe, nämlich nur die langsamen Teilchen, die schnelleren sind nicht einmal andeutungsweise vorhanden.

Die Gegenspannungskurven in Wasserstoff nähern sich bei größeren Streuwinkeln denen der Methankurve an, haben aber bei kleineren Streuwinkeln noch einen merkbaren Prozentsatz von schnelleren Teilchen.

*Diskussion zu 3.* Der Vergleich der experimentell gefundenen Geschwindigkeiten der schnellen Teilchen für die verschiedenen Streuwinkel mit denjenigen, die sich aus dem Zusammenstoß elastischer Kugeln von gegebenem Massenverhältnis berechnen lassen, führt bei Helium und Argon zu völliger Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch. Die Gruppe der schnellen Teilchen besteht also immer aus elastisch gestreuten Protonen, auch wenn ihre Geschwindigkeit merkbar kleiner ist als die Primärgeschwindigkeit.

4. Die Winkelverteilungskurven der elastisch gestreuten Protonen zeigen in Helium und Argon im großen und ganzen einen monotonen Abfall mit größer werdendem Streuwinkel, wobei die starke Streuung unter kleinen Streuwinkeln bemerkenswert ist.

*Diskussion zu 4.* Die Absolutauswertung der Streukurven berechtigt zu dem Schluß, daß die überwiegende Zahl aller Zusammenstöße zwischen Protonen und Heliumatomen zu elastischer Streuung der Protonen führt. — Durch eine Umrechnung auf ruhenden Schwerpunkt nähern sich die Streukurven von Helium und Argon in ihrem Verlauf, doch fällt die Heliumkurve noch merklich steiler ab als die Argonkurve. — Die experimentell gefundene Heliumstreuurve wird verglichen mit der Gleichverteilung, die sich beim Stoß elastischer Kugeln ergibt, und mit der Kurve reiner Kernstreuung: In Helium liegt weder der eine noch der andere Fall vor.

Berlin-Reinickendorf.

(Eingegangen 7. Dezember 1932)

## *Über die Dichteverteilung unipolarer Ionenströme* *Von Walther Deutsch*

(Mit 7 Figuren)

Wenn Teilgebiete einer stationären Gasentladung nur von Ionen eines Vorzeichens durchströmt werden, so können die Vorgänge in diesen Gebieten vollständig durch das Raumladungsgesetz (Poissonsche Differentialgleichung) und durch das Kontinuitätsgesetz der Strömung beschrieben werden, wenn man den Bedingungen an den Grenzen dieser Gebiete gewisse feste Annahmen zugrunde legen darf; diese Annahmen können je nach der Erzeugungsart der Ionen (Stoßionisation, Fremdionisation) verschieden sein.

Nur für den Fall *ebener Elektroden* ist es gelungen<sup>1)</sup>, den Vorgang der selbständigen Entladung ohne solche räumliche Abgrenzungen einheitlich zu beschreiben und die den Stabilitätszuständen entsprechenden Ströme zu berechnen.

Die Theorie der unipolaren Strömung im *zylindrischen Kondensator* [Thomson<sup>2)</sup>, Townsend<sup>3)</sup>] kommt bereits ohne die eben erwähnte Teilung in ein reines Strömungsgebiet und in eine Ionen erzeugende Schicht nicht aus, gibt aber trotz der die Allgemeingültigkeit sehr beschränkenden Grenzannahmen die in Wirklichkeit bei dieser Anordnung auftretenden Ströme in einem erstaunlich ausgedehnten Gebiet selbst dann recht gut wieder, wenn noch weitere vereinfachende Annahmen<sup>4)</sup> gemacht werden; sie wird denn auch in der Technik mit Vorteil angewendet.

Eine Theorie der Ionenströmung zwischen anderen Elektrodenanordnungen als den beiden erwähnten ist meines Wissens bisher nicht versucht worden, und das hat wohl seinen Grund darin, daß bei unsymmetrischer Strömung die Kontinuitätsbeziehung in ihrer *allgemeinen* Form die Aufgabe sehr erschwert.

1) W. Rogowski, *Phys. Ztschr.* [33] **21**. S. 797. 1932.

2) J. J. Thomson, *Elektrizitätsdurchgang in Gasen* (Teubner 1906) S. 428.

3) J. S. Townsend, *Phil. Mag.* [6] **28**. S. 834 ff. 1914.

4) J. S. Townsend, Marx, *Handbuch der Radiologie* Bd. I. S. 331. 1920.

Und doch liegt ein erhebliches Bedürfnis nach Erfassung dieser Strömungsvorgänge vor; namentlich wäre der Technik (Hochspannungstechnik, elektrische Gasreinigung) vielfach schon mit rohen Näherungen gedient.

In der folgenden Theorie bin ich nun in der Annäherung noch etwas über die Townsendsche Annahme (geringer Raumladung) hinausgegangen, indem ich dem durch die Raumladung gestörten Feld dieselbe *Richtung* zuwies, wie dem ungestörten statischen. Dadurch wird es möglich, jede Kraft- röhre gleichsam gesondert von allen übrigen zu betrachten.

Wir werden ferner in den Anwendungen nur die Emission von kleinflächigen Gebilden, wie Drähten, kleinen Kugeln, Spitzen und Kanten, untersuchen, in deren nächster Nähe die Feldstärke und die Ionendichte so hoch sind, daß starke Windströmungen daselbst die Ionen auch in benachbarte Bezirke (Kraftröhren) *verteilen* (elektrischer Wind an einer Spitze). Nur durch diese Annahme wird es beispielsweise ermöglicht, den verhältnismäßig großen Streuwinkel der Spitzenentladung und die Gültigkeit der für kontinuierliche Entladungen abgeleiteten Thomsonschen Zylinderformel auch bei der in Wirklichkeit meistens auftretenden diskreten Anordnung<sup>1)</sup> der Sprühpunkte zu verstehen. Es zeigt sich nun beim Vergleich einiger, mit Hilfe der folgenden Theorie gewonnener Resultate mit bereits vorliegenden Versuchszahlen eine Übereinstimmung, die befriedigender ist, als man nach allen diesen Voraussetzungen erwarten konnte, zumal sich die herausgegriffenen Fälle sehr heterogen gegeneinander verhalten: der eine betrifft die Entladung einer Nadelspitze gegen eine Ebene, der andere die Entladung eines Paralleldrahtgitters inmitten zweier Ebenen. Dieser letztere Fall ist auch von fundamentaler Bedeutung für die Technik der elektrischen Gasfilterung und wird daher im Zusammenhang mit dieser demnächst an anderer Stelle ausführlich behandelt.

#### A. Ableitung einer allgemeinen Formel für die Stromdichte

Es wird also die folgende Aufgabe gestellt: An der Oberfläche einer beliebig begrenzten Elektrode können in unbegrenzter Zahl Gasionen von gleicher Ladung entstehen; das zwischen ihr und einer zweiten, auf anderem Potentialwert

1) E. Warburg, Handb. d. Phys. 14 (Springer 1927). S. 160; R. Ladenburg u. W. Tietze, Ann. d. Phys. [5] 6. S. 607. 1930; W. Deutsch, Ztschr. f. techn. Phys. 7. S. 628. 1926.

gehaltenen Elektrode bestehende zeitlich konstante elektrische Feld erteilt diesen Ionen eine im stationären Zustand überall der Feldstärke proportionale Geschwindigkeit; wie verteilt sich die Stromdichte, und zwar insbesondere an der Oberfläche der beiden Elektroden?

Wir bezeichnen die emittierende Elektrode mit  $E$ , die andere mit  $S$ , ihre Potentiale mit  $v_E$  bzw.  $v_S$ , die der Feldstärke 1 entsprechende Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen mit  $K$ , die resultierende Feldstärke an einem gegebenen Ort  $P$  des Feldes mit  $F$  und die Raumladungsdichte der Ionen am Ort  $P$  mit  $q$ . Die resultierende Stromdichte bei  $P$  ist dann:

$$(1) \quad j = KFq.$$

$F$  steht senkrecht zu der durch  $P$  hindurchgehenden Äquipotentialfläche und der Stromfluß durch ein Flächenelement  $df$  der letzteren im Punkte  $P$  ist daher:

$$(2) \quad di = KFqdf.$$

Die Umgrenzung des Flächenelementes  $df$  bildet die Spur eines röhrenförmig angeordneten Bündels von Kraftlinien — diese definiert durch die orthogonalen Trajektorien der Äquipotentialflächen — und da die Mantelfläche dieser Kraftröhre keine Ionen von den Nachbarröhren empfangen oder an sie abgeben kann, außer in nächster Nähe von  $E$ , muß durch alle Querschnitte der Röhre der gleiche Strom  $di$  fließen. Da es sich aber hier nicht um ein quellenfreies Feld handelt, ist der Fluß  $Fdf$  längs der Röhre nicht ganz konstant.

Hier machen wir nun die Voraussetzung, daß sich zwischen  $E$  und  $S$  nur *wenige* Ionen befinden mögen, so daß der Fluß, der durch das ungestörte elektrostatische Feld vorhanden ist, bei weitem den zusätzlichen Fluß der Quellen überragt; mit anderen Worten: wir substituieren in Gl. (2) statt des Raumladungsfeldes ein quellenfreies Feld, für das dann längs der Kraftröhre ein konstanter Fluß:  $Fdf$  besteht. Aus Gl. (2) folgt dann aber, daß auch  $q$  im ganzen Inneren der Kraftröhre annähernd konstant sein muß. Bezeichnen wir die Feldstärken an den Elektroden mit  $F_E$  bzw.  $F_S$ , das von der Röhre aus der Oberfläche von  $S$  ausgeschnittene Flächenelement mit  $d\sigma$ , so folgt aus (2):

$$(3) \quad di = KqF_S d\sigma$$

und die Stromdichte an der Elektrode  $S$  ergibt sich zu:

$$(4) \quad j_s = KF_S \cdot q.$$

Hier können gemäß unserer oben gemachten Voraussetzung für  $F_s$  die statischen Werte eingesetzt werden. Kennt man also die Potentialverteilung — und mit ihr  $F_s$  — für den Fall eines ladungsfreien Gebietes zwischen  $E$  und  $S$ , wird also die Gleichung:

$$(5) \quad \Delta \varphi = 0$$

mit  $\varphi = v_E$  an  $E$  und  $\varphi = v_S$  an  $S$  als gelöst betrachtet, so kommt es nunmehr darauf an,  $q$  für jede Stelle der Elektrodenoberfläche zu finden.

Bei dieser Aufgabe ist es aber gerade der Unterschied zwischen Quellenfeld und quellenfreiem Feld, durch den  $q$  bestimmt ist; man hat die Gleichung:

$$(6) \quad \Delta \Phi = -4\pi q,$$

in der wir gemäß unserer früher gezogenen Folgerung  $q$  längs einer Kraftlinie konstant setzen dürfen.

In anderer Form lauten die Gl. (5) und (6):

$$(7) \quad \begin{cases} \operatorname{div} E_1 = 0, \\ \operatorname{div} E_2 = 4\pi q, \end{cases}$$

wo  $E_1, E_2$  die Vektoren der betreffenden Feldstärke bedeuten.

Die Raumladung in der Nähe der einen Elektrode wirkt im allgemeinen das Feld verstärkend, die in der Nähe der anderen Elektrode schwächend; die Hauptwirkung der Raumladung wird daher in einer geringen Erhöhung oder Erniedrigung der *resultierenden* Feldstärke, und nur in geringerem Maße in einer Abbeugung der Feldrichtung zu suchen sein, so daß wir in erster Annäherung die Richtung des Feldes  $E_1$  gleich derjenigen des Feldes  $E_2$  annehmen werden; es wird also gesetzt:

$$(8) \quad \frac{E_2}{E_1} = \vartheta,$$

wo  $\vartheta$  ein Skalarfeld bedeutet. Aus (8) und (7) folgt dann:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E_2 &= \operatorname{div} E_1 \vartheta = \vartheta \operatorname{div} E_1 + E_1 \operatorname{grad} \vartheta \\ &= E_1 \operatorname{grad} \vartheta = |E_1| \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial s} = F \frac{d\vartheta}{ds}, \end{aligned}$$

wo  $s$  die Normale einer Niveaufläche bedeutet.

Es ist also:

$$(9) \quad F \frac{d\vartheta}{ds} = 4\pi q$$

eine Gleichung, die man längs der Kraftlinie  $s$  integrieren kann.

$$(10) \quad \vartheta = 4\pi q \int \frac{ds}{F} + c_1.$$



Nach Gl. (8) ist aber:

$$\vartheta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{|E_2|}{|E_1|} = \frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial s}}{F},$$

so daß sich durch abermalige Integration ergibt:

$$(11) \quad \Phi = -4\pi q \int F ds \int \frac{ds}{F} - c_1 \int F ds + c_2.$$

$\Phi$  geht an der Elektrode  $E$  in  $v_E$ , an der Elektrode  $S$  in  $v_S$  über; daraus folgt:

$$v_S - v_E = -4\pi q \int_E^S F ds \int \frac{ds}{F} - c_1 \int_E^S F ds.$$

Wir bezeichnen die Potentialdifferenz  $v_S - v_E$  mit  $v$  und es ergibt sich also:

$$v(1 - c_1) = -4\pi q \int_E^S F ds \int \frac{ds}{F}.$$

Setzt man das hieraus folgende  $c_1$  in (10) ein, so erhält man:

$$\vartheta = \frac{|E_2|}{F} = 4\pi q \int \frac{ds}{F} + \frac{4\pi q}{v} \int_E^S F ds \int \frac{ds}{F} + 1$$

und weiter:

$$F - |E_2| = -\frac{4\pi q F}{v} \int_E^S F ds \int \frac{ds}{F} - 4\pi q F \int \frac{ds}{F}.$$

Diese Gleichung geht an der Elektrode  $E$  über in:

$$F_E - |E_2|_E = -\frac{4\pi q F_E}{v} \int_E^S F ds \int \frac{ds}{F} - 4\pi q F_E \left( \int \frac{ds}{F} \right)_E.$$

In allen denjenigen Entladungsformen, in denen das Feld unmittelbar vor der Emissionselektrode durch die Entladung auf einen Wert  $|E_2|_E$  zusammenbricht, der nur von der Form und dem Material der Elektrode oder der Art des umgebenden Gases abhängig ist, nicht aber von der mehr oder weniger hohen Belastungsstromstärke, stellt  $|E_2|_E$  eine für die betreffende Elektrodenanordnung und Gasart charakteristische Größe dar, die im Falle des Koronastromes mit der „Anfangsfeldstärke“ identisch ist. Solange die „statische“ Feldstärke  $F_E$  den Wert  $|E_2|_E = F_0$  noch nicht erreicht hat oder, anders ausgedrückt, solange die Elektrodenanspannung  $v$  die Durchbruchspannung



$v_0$  noch nicht erreicht hat, ist noch keine Strömung vorhanden; da dabei alle Feldstärken der aufgedrückten Spannung proportional sind, so können wir die letzte Gleichung auch schreiben:

$$(12) \quad v - v_0 = -4\pi q \left[ \int_E^S F ds \int \frac{ds}{F} + v \left( \int \frac{ds}{F} \right)_E \right].$$

Den Klammerausdruck formen wir nun um; es ist:

$$\begin{aligned} \int_E^S F ds \int \frac{ds}{F} &= - \int_E^S d\varphi \int \frac{ds}{F} = - \left\{ \overline{\varphi \int \frac{ds}{F}}_E^S - \int_E^S \varphi \frac{ds}{F} \right\} \\ &= - \left\{ v_S \left( \int \frac{ds}{F} \right)_S - v_E \left( \int \frac{ds}{F} \right)_E - \int_E^S \varphi \frac{ds}{F} \right\}. \end{aligned}$$

Gl. (12) wird also:

$$(13) \quad \begin{cases} v - v_0 = 4\pi q \left[ v_S \left( \int \frac{ds}{F} \right)_S - v_E \left( \int \frac{ds}{F} \right)_E - \int_E^S \varphi \frac{ds}{F} \right] \\ = 4\pi q \left[ v_S \int_E^S \frac{ds}{F} - \int_E^S \varphi \frac{ds}{F} \right] = -4\pi q \int_E^S (\varphi - v_S) \frac{ds}{F}. \end{cases}$$

Der gesuchte Wert von  $q$  ist also:

$$(14) \quad q = - \frac{v - v_0}{4\pi \int_E^S (\varphi - v_S) \frac{ds}{F}}.$$

Aus Gl. (4) erhält man demnach als Lösung:

$$(15) \quad j_S = - \frac{KF_S}{4\pi \int_E^S (\varphi - v_S) \frac{ds}{F}} \cdot (v - v_0).$$

Wählt man als Variable das Potential  $\varphi$ , so ergibt sich schließlich für  $j_S$ :

$$(16) \quad j_S = - \frac{KF_S}{4\pi \int_{v_S}^{v_E} (\varphi - v_S) \frac{d\varphi}{F^2}} \cdot (v - v_0).$$

Die gesamte Emission der Elektrode ist  $\int j_S d\sigma$ , wobei zu berücksichtigen ist, daß im allgemeinen auch  $v_0$  von Stelle zu Stelle variieren kann.

Das in (16) vorkommende Integral:

$$(17) \quad L = \int_{v_s}^{v_E} \frac{(\varphi - v_s) d\varphi}{F^2}$$

ist positiv und hat die Dimension einer Fläche; werden daher die Lineardimensionen der Elektrodenanordnung ver- $n$ -facht, so geht  $L$  in  $n^2 L$  über.

Sind die Elektroden parallele langgestreckte Zylinder, deren Spuren auf der quergestellten  $Z$ -Ebene die Kurven  $E$  und  $S$  bestimmen und kennt man die Lösung der entsprechenden Abbildungsaufgabe für das logarithmische Potential, so ist  $\varphi$  in der obigen Gleichung der reelle Teil einer Funktion

$$(18) \quad w = \varphi + i\psi = f(Z),$$

deren imaginärer Teil  $\psi$  den Fluß bis zu einer den Punkt  $P$  enthaltenden Kraftlinie darstellt. Die Feldstärke ist dann bekanntlich:

$$(19) \quad F = - \left| \frac{dw}{dz} \right| = - \left| \frac{dz}{dw} \right|.$$

In dieser Weise läßt sich  $F$  als Funktion von  $\varphi$  und  $\psi$  (letzteres ist längs der Kraftlinie, über die die Integration von  $v_E$  bis  $v_s$  auszudehnen ist, konstant) ausdrücken und man erhält:

$$(20) \quad L = \int_{v_s}^{v_E} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 (\varphi - v_s) d\varphi.$$

(17) und (20) stellen die Lösungen unseres Problems für das Newtonsche und für das logarithmische Potential dar.

#### B. Erprobung der Formeln für die bekannten einfachen Anordnungen

Die Berechnung des Stromes ist in folgenden Fällen schon früher durchgeführt worden:

a) Koronastrom  $i$  zwischen Draht vom Radius  $a$  und konzentrischem Zylinder vom Radius  $A$ ; Länge  $= l$ .

Townsend<sup>1)</sup> hat unter der gleichen Voraussetzung geringer Raumladung dafür die Formel abgeleitet:

$$(21) \quad i = \frac{2Kl}{A^2 \lg \frac{A}{a}} v(v - v_0),$$

1) J. S. Townsend, in Marx Hdb. d. Rad. Bd. I. S. 331. 1920.

also:

$$j_s = \frac{K}{A^3 \pi \lg \frac{A}{a}} v(v - v_0).$$

Durch Vergleich mit (15) müßte sich demnach ergeben:

$$(22) \quad L = - \frac{F_s}{v} A \lg \frac{A}{a} \cdot \frac{A^2}{4}.$$

b) Unipolare Ionenleitung zwischen einer ebenen glühenden Elektrode und einer zu ihr parallelen Gegenelektrode im Abstände  $d$ .

Diese Aufgabe läßt sich auch ohne die annähernde Voraussetzung geringer Raumladung lösen<sup>1)</sup>, wobei für geringe Ströme  $v_0 = 0$  ( $F_0 = 0$ ) gesetzt werden darf. Führt man aber die Rechnung ganz analog der eben erwähnten Townsendschen Ableitung durch, so ergibt sich zwar die gleiche Spannungs- und Abstandsabhängigkeit, aber der  $16/9$  mal höhere Wert:

$$j_s = \frac{1}{2} \frac{K v^2}{\pi d^3}$$

und

$$(23) \quad L = - \frac{F_s}{v} \frac{d^3}{2}.$$

Es ist daraus zu schließen, daß die Townsendsche Annahme nur dann praktisch brauchbare Annäherungen ergibt, wenn die Emission nicht, wie im vorliegenden Falle, von einer ausgedehnten Fläche ausgeht, sondern nur von einer mehr oder weniger kleinflächigen Emissionsstelle.

c) Ein weiterer einfacher Fall, nämlich der Koronastrom einer kleinen Kugel (Radius  $a$ ) im Zentrum einer großen Kugel (Radius  $A$ ), ist scheinbar noch nicht behandelt worden; er ist ja auch nicht ohne weiteres realisierbar. Es läßt sich hier Schritt für Schritt wieder die Townsendsche Ableitung für die Zylinderanordnung anwenden und man erhält:

$$j_s = \frac{K a}{2 \pi A^4} v(v - v_0)$$

und

$$(24) \quad L = - \frac{F_s}{6v} \frac{A^4}{a}.$$

1) J. J. Thomson, *El. Durchg. in Gasen* (Teubner 1906) S. 174.

Zu a): In der Tat kann man aus Gl. (20) den Wert (22) direkt bestimmen; wir setzen zu diesem Zweck  $v_s = 0$ , haben also:

$$(25) \quad w = v_E \frac{\lg \frac{z}{a}}{\lg \frac{A}{a}}.$$

Wir können offenbar auch, ohne die allgemeine Gültigkeit zu beeinträchtigen, normieren:

$$(26) \quad \frac{v_E}{\lg \frac{A}{a}} = 1$$

und erhalten:

$$z = A e^w = A e^{\varphi + i\psi}$$

und

$$\left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = |z|^2 = A^2 e^{2\varphi},$$

also gemäß (20):

$$L = A^2 \int_0^{v_E} e^{2\varphi} \varphi \, d\varphi = \frac{A^2}{4} (1 + e^{2v_E} (2v_E - 1))$$

und aus (26)

$$L = \frac{A^2}{4} \left( 1 + \frac{a^2}{A^2} \left( 2 \lg \frac{A}{a} \right) \right).$$

Für  $A \gg a$  geht also  $L$  über in:

$$(27) \quad L = \frac{A^2}{4}.$$

Das ist aber mit Rücksicht auf:

$$F_s = - \frac{v}{A \lg \frac{A}{a}}$$

der aus Gl. (22) hervorgehende Wert:

Zu b): Ebenso kann man Gl. (23), die mit Rücksicht auf

$$F_s = - \frac{v}{d}$$

lautet:

$$(28) \quad L = \frac{d^2}{2}$$

verifizieren: Es sei wieder  $v_s = 0$ ; die reelle Achse falle mit der Spur der Ebene  $E$  zusammen, dann ist:

$$(29) \quad w = v_E \frac{d - z}{d}.$$

Die Normierung:

$$(30) \quad \frac{d}{v_E} = 1$$

ergibt:

$$z = d - w, \quad \frac{dz}{dw} = -1, \quad \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = 1$$

und daher:

$$L = \int_0^{v_E} \varphi d\varphi = \frac{v_E^2}{2};$$

also gemäß (30) in der Tat:

$$L = \frac{d^2}{2}.$$

Zu c): Schließlich beweisen wir noch für den Fall des Kugelkondensators die Richtigkeit der Gl. (24), die mit:

$$F_s = - \frac{av}{A^2}$$

ergibt:

$$(31) \quad L = \frac{A^2}{6}.$$

Es ist für  $v_s = 0$ :

$$\varphi = v_E \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{A}}$$

und die Feldstärke:

$$F = \frac{v_E}{\left( \frac{1}{a} - \frac{1}{A} \right) r^2}.$$

Eliminiert man unter Berücksichtigung von:  $A \gg a$  aus diesen beiden Gleichungen das  $r$ , so ergibt sich:

$$F = v_E a \left( \frac{\varphi}{v_E a} + \frac{1}{A} \right)^2$$

und aus Gl. (17) daher:

$$L = \frac{1}{v_E^2 a^2} \int \frac{\varphi d\varphi}{\left( \frac{\varphi}{v_E a} + \frac{1}{A} \right)^4}.$$

Die Integration ergibt (wieder mit  $A \gg a$ ):

$$L = \frac{A^2}{6},$$

wie vorhin.

**C. Anwendung auf die Stromverteilung  
zwischen emittierendem Draht und paralleler Platte**

Wir werden nunmehr Gl. (20) auf einen Fall anwenden, der z. B. in der Technik zur Berechnung der Koronaverluste einer Hochspannungsfreileitung benutzt werden kann: Ein dünner ( $\varrho$ ) ausgespannter Draht von kreisförmigem Querschnitt sprühe gegen eine, seiner Achse parallele Ebene (Erdboden). Sein Potential sei wieder gleich  $v_E$ , das der Ebene gleich 0.

Die Abbildungsfunktion (vgl. Figur 1) ist hier für  $\varrho \ll H$ :

$$w = v_E \frac{\lg \frac{z-H}{z+H}}{\lg \frac{\varrho}{2H}}.$$

Wir normieren:

Fig. 1. Emittierender Draht  $E$  gegenüber der Ebene  $S$  (32)  $\frac{1}{v_E} \lg \frac{2H}{\varrho} = 2$

und erhalten als Umkehrung:

$$(33) \quad z = H \frac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}} = H \cdot \operatorname{Cotg} w.$$

Man erhält leicht:

$$\left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = \frac{4H^2}{(\cos 2\varphi - \cos 2\psi)^2}$$

und daher nach Gl. (20):

$$(34) \quad L = 4H^2 \int_0^{v_E} \frac{\varphi d\varphi}{(\cos 2\varphi - \cos 2\psi)^2}.$$

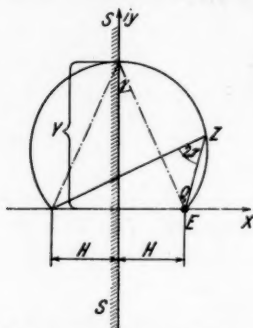
In diesen Formeln ist  $\psi$  der imaginäre Teil der Abbildungsfunktion

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \frac{z-H}{z+H},$$

also gemäß Fig. 1:

$$(35) \quad \psi = \gamma = \operatorname{arctg} \frac{H}{y}.$$

Es genügt demnach, für  $\psi$  Werte im Bereich 0 ( $y = \infty$ ) bis  $\frac{\pi}{2}$  ( $y = 0$ ) anzusetzen.



Ist das Verhältnis  $H/\varrho$  größer als 100, so wird nach Gl. (32):

$$(36) \quad v_E > 2,65.$$

Für Werte  $\varphi > 2,65$  ist aber in Gl. (34)  $\cos \cdot 2\psi (\cong 1)$  gegen  $\cos \cdot 2\varphi (> 100)$  zu vernachlässigen und es ist wegen

$$\cos \cdot 2\varphi \doteq \frac{1}{2} e^{2\varphi}$$

dieses Integral:

$$\int_{2,65}^{\infty} \frac{\varphi d\varphi}{\frac{1}{4} e^{4\varphi}} \doteq 3 \cdot e^{-10,6}$$

gegen  $L$  zu vernachlässigen; wir können daher für Werte von  $\frac{H}{\varrho} > 100$  statt der Gl. (34) unbedenklich schreiben:

$$(37) \quad L = 4H^2 \int_0^{\infty} \frac{\varphi d\varphi}{(\cos 2\varphi - \cos 2\psi)^2}.$$

$L$  ist demnach praktisch unabhängig vom Verhältnis  $H/\varrho$ .

Wertet man das Integral (37) für einige diskrete Winkel  $\psi$  nach bekannten Methoden (z. B. graphisch oder planimetrisch) aus und trägt dann die Größe

$$(38) \quad \frac{4H^2}{L} = \lambda$$

als Funktion des Winkels  $\psi$  auf, so erhält man die in Fig. 2 gezeichnete Kurve.

Als Feldstärke an der Ebene erhalten wir:

$$\begin{aligned} F_s &= - \left| \frac{dw}{dz} \right|_{\varphi=0} = - \frac{(\cos 2\varphi - \cos 2\psi)_{\varphi=0}}{2H} \\ &= - \frac{1 - \cos 2\psi}{2H} = - \frac{\sin^2 \psi}{H} \end{aligned}$$

und daher nach Gl. (35) und (32):

$$(39) \quad F_s = - \frac{H}{H^2 + Y^2} = \frac{2Hv}{(H^2 + Y^2) \lg \frac{2H}{\varrho}},$$

wo wieder  $v = -v_E$  gesetzt ist.

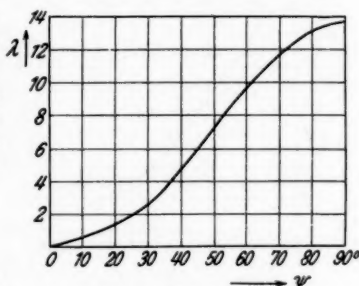


Fig. 2

Die Gl. (15) ergibt nunmehr mit Gl. (38) als Stromdichte am Punkte Y der Ebene:

$$j_s = \frac{K}{8\pi H \lg \frac{2H}{\varrho}} \cdot \frac{\lambda}{H^2 + Y^2} \cdot v(v - v_0) \quad (42)$$

oder mit

$$(40) \quad \mu = \frac{\lambda}{1 + \left(\frac{Y}{H}\right)^2}$$

als „Verteilungsfunktion“:

$$(41) \quad j_s = \frac{K\mu}{8\pi H^2 \lg \frac{2H}{\varrho}} v(v - v_0). \quad (43)$$

Die Verteilungsfunktion  $\mu$  läßt sich unschwer aus den Werten der Fig. 2 ableiten (Fig. 3) und da hier  $v_0$  — wie

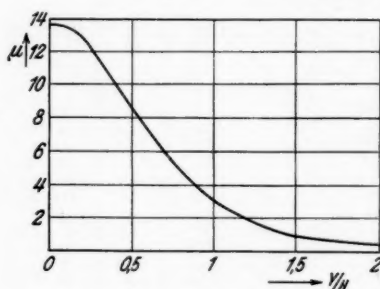


Fig. 3

noch gezeigt wird — für alle Krafttröhren praktisch den gleichen Wert hat, so stellt Fig. 3 bereits die gesuchte Verteilung der Stromdichte dar.

Die Anfangsspannung  $v_0$  ist deshalb unabhängig von  $\psi$ , weil  $F_E$  nach allen Richtungen praktisch denselben Wert annimmt. Es ist nämlich wegen  $v_E > 2,65$

$$\begin{aligned} F_E &= - \left| \frac{dv}{dz} \right|_{\varphi=v_E} = - \frac{(\cos 2\varphi - \cos 2\psi)\varphi = v_E}{2H} \\ &= - \frac{\frac{H}{\varrho} - \cos 2\psi}{2H} = - \frac{1}{2\varrho} \end{aligned}$$

unabhängig von  $\psi$ .

Die doppelte, von der Kurve und der Abszissenachse in Fig. 3 eingeschlossene Fläche — man erhält den Wert 9,8 — ergibt das Maß des gesamten, vom Draht nach der Ebene emittierten Stromes  $i_E$  pro Längeneinheit; es ist:



$$(42) \quad \begin{cases} i_E = \int_{-\infty}^{+\infty} j_s dy = 2 \frac{K v (v - v_0)}{8\pi H^2 \lg \frac{2H}{\varrho}} \int_0^{\infty} \mu dy \\ = \frac{K v (v - v_0)}{4\pi H^2 \lg \frac{2H}{\varrho}} \int_0^{\infty} \mu d \frac{y}{H} = \frac{0,78 K}{H^2 \lg \frac{2H}{\varrho}} v (v - v_0). \end{cases}$$

Vergleicht man damit den Koronastrom in einem Zylinder vom Radius  $A = H$  und  $a = \varrho$  [Gl. (21)], so ergibt sich:

$$(43) \quad \frac{i_Z}{i_E} = 2,57 \frac{\lg \frac{2H}{\varrho}}{\lg \frac{H}{\varrho}} \frac{v - v_{0Z}}{v - v_{0E}}.$$

Für  $\frac{H}{\varrho} > 100$  wird also — abgesehen von Werten von  $v$  ganz in der Nähe der Anfangsspannungen  $v_{0Z}$  und  $v_{0E}$  — der Zylinderstrom etwa 3 mal so groß, wie der Sprühstrom nach der Ebene.

Hingegen ist die Stromdichte im Fußpunkt der Ebene größer, als beim Kreiszylinder; für  $\frac{Y}{H} = 0$  liest man nämlich aus der Kurve der Fig. 3 ab:

$$\mu = 13,6$$

und erhält aus Gl. (41) in Verbindung mit Gl. (1)

$$\left( j_s = \frac{i}{2A\pi} \right),$$

ohne Berücksichtigung des Unterschiedes der Anfangsspannungen:

$$\left( \frac{j_{sE}}{j_{sZ}} \right)_0 = \frac{13,6}{8} \frac{\lg \frac{H}{\varrho}}{\lg \frac{2H}{\varrho}},$$

also einen um etwa 50—70% höheren Stromdichtewert für  $j$ .

Aus S. 598 ergibt sich eine zylindrische Feldverteilung in der Nähe der Elektrode  $E$ , so daß sich diejenigen Überlegungen, die zur Aufstellung der bekannten, für die Anfangsfeldstärke im Zylinderkondensator in Luft gültigen Formel:

$$(44) \quad F_0 = 30 + \frac{9}{\sqrt{\varrho}}$$

führen, auch auf diesen Fall übertragen lassen; es ist dann:

$$F_0 = -\frac{1}{2\varrho}$$

oder die Anfangsspannung nach (32):

$$(45) \quad v_0 = F_0 \varrho \lg \frac{2H}{\varrho}.$$

#### D. Anwendung auf die Stromverteilung bei der Spitzenentladung

Es sei eine hyperboloidisch gekrümmte ( $\varrho$ )-Spitze einer Ebene entgegengestellt;  $A$  sei der Fokalabstand der erzeugenden Hyperbel. Es werde wieder vorausgesetzt:  $\varrho \ll A$ .

Zur Berechnung der Funktion  $L$  genügt es indes, das Hyperboloid in eine unendlich dünne Nadel ( $\varrho = 0$ ) zusammenzuschumpfen zu lassen.

Die Kraftlinien liegen in diesem Falle bekanntlich auf Ellipsoiden mit dem konstanten Fokalabstand  $2A$ , deren Gleichung durch

$$(46) \quad \frac{x^2}{A^2 \sigma^2} + \frac{y^2 + z^2}{A^2 (\sigma^2 - 1)} = 1$$

gegeben ist. Die sie senkrecht durchsetzenden zweischaligen Hyperboloide mit dem gleichen Brennpunkt sind die Niveauflächen; sie haben die Gleichung:

$$(47) \quad \frac{x^2}{A^2 \tau^2} - \frac{y^2 + z^2}{A^2 (1 - \tau^2)} = 1.$$

Bezeichnet man noch mit  $\eta$  den Winkel, den eine durch die  $x$ -Achse gehende Schnittebene mit der  $x, y$ -Ebene einschließt, so ist ein Punkt des Raumes durch die elliptischen Koordinaten:

$$(48) \quad \begin{cases} x = A \sigma \tau, \\ y = A \sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2} \cos \eta, \\ z = A \sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2} \sin \eta \end{cases}$$

bestimmt. Mit der Koordinate  $\sigma$ , die die Werte  $+1$  bis  $+\infty$  durchläuft, werden auch die Ellipsoide immer größer und größer. Durchläuft  $\tau$  die Werte von  $0$  bis  $+1$ , so wölbt sich die Ebene  $S$  ( $x = 0$ ) zu immer schlankeren Hyperboloiden, bis diese in die Nadel  $E$  degenerieren.

Der Schritt  $ds$  in Richtung der Kraftlinien (von  $E$  nach  $S$ ) läßt sich aus Gl. (48) leicht, als Funktion von  $\sigma$  und  $\tau$ , bestimmen:

$$(49) \quad ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2} \cdot d\sigma = -A \sqrt{\frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}} d\tau.$$

Die Potentialfunktion ist hier:

$$(50) \quad \varphi = P \lg \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}.$$

In der Ebene  $\tau = 0$  ist auch  $\varphi_s = 0$ ; in der Elektrode  $\tau = \tau_E$  ist  $\varphi = v_E$ :

$$(51) \quad v_E = P \lg \sqrt{\frac{1+\tau_E}{1-\tau_E}}.$$

Für die Funktion  $L$  nehmen wir in diesem Fall die aus der Gl. (12) hervorgehende Form:

$$(52) \quad L = - \int_E^s d\varphi \int \frac{ds}{F} + v \left( \int \frac{ds}{F} \right)_E.$$

Hier ist:

$$\int \frac{ds}{F} = - \int \frac{(ds)^2}{d\varphi}$$

und es folgt aus (49) und (50):

$$(53) \quad \int \frac{ds}{F} = - \int \frac{A^2}{P} (\sigma^2 - \tau^2) d\tau = - \frac{A^2}{P} \tau \left( \sigma^2 - \frac{1}{3} \tau^2 \right).$$

Ebenso leicht erhält man:

$$(54) \quad \begin{cases} - \int d\varphi \int \frac{ds}{F} = A^2 \int \frac{\sigma^2 - \frac{1}{3} \tau^2}{1 - \tau^2} \tau d\tau \\ = - \frac{A^2}{2} \left\{ \left( \sigma^2 - \frac{1}{3} \right) \lg (1 - \tau^2) + \frac{1}{3} (1 - \tau^2) \right\}. \end{cases}$$

Für die Elektrode  $E$  erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (51) aus (53):

$$(55) \quad v \left( \int \frac{ds}{F} \right)_E = - v_E \left( \int \frac{ds}{F} \right)_E = \frac{A^2}{2} \tau_E \left( \sigma^2 - \frac{1}{3} \tau_E^2 \right) \lg \frac{1 + \tau_E}{1 - \tau_E}.$$

Setzt man in (54) die in (52) vorgeschriebenen Grenzen ein und vereinigt sie dann mit Gl. (55), so erhält man unter anderem zwei Glieder mit dem Faktor  $\lg (1 - \tau_E)$ , die für  $\tau_E = 1$  die unbestimmte Form  $\infty - \infty$  ergeben; man kann leicht nachweisen, daß sich diese Glieder einfach aufheben, so daß im übrigen für die Elektrode  $E$  der Wert  $\tau_E = 1$  eingesetzt werden kann; man erhält demnach:

$$L = - \frac{A^2}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \left( \sigma^2 - \frac{1}{3} \right) \lg 2 \right\} + \frac{A^2}{2} \left\{ \left( \sigma^2 - \frac{1}{3} \right) \lg 2 \right\}$$

oder:

$$(56) \quad L = \frac{A^2}{2} \left\{ \left( \sigma^2 - \frac{1}{3} \right) \lg 4 - \frac{1}{3} \right\} = 0,69 A^2 (\sigma^2 - 0,574).$$

Aus (49), (50) und (51) erhält man wegen  $v = -v_E$ :

$$(57) \quad F_S = \left( \frac{\frac{P}{A}}{\sqrt{1-\tau^2} \sqrt{\sigma^2 - \tau^2}} \right)_{\tau=0} = \frac{P}{A\sigma} = \frac{-v}{A\sigma \lg \sqrt{\frac{1+\tau_E}{1-\tau_E}}}.$$

Es ist daher die Stromdichte an der Ebene  $S$  entsprechend Gl. (15):

$$j_S = \frac{K}{4\pi \cdot 0,69 A^3 \sigma (\sigma^2 - 0,574) \lg \sqrt{\frac{1+\tau_E}{1-\tau_E}}} v(v - v_0)$$

oder:

$$(58) \quad j_S = \frac{0,115 K}{A^3 \sigma (\sigma^2 - 0,574) \lg \sqrt{\frac{1+\tau_E}{1-\tau_E}}} v(v - v_0).$$

Die Bedeutung von  $\sigma$  für  $\tau = 0$  geht aus der Gl. (48) hervor; ist  $R$  die radiale Entfernung eines Punktes der Ebene  $S$  vom Fußpunkt, so ist:

$$R = A \sqrt{\sigma^2 - 1}.$$

Man kann daher die „Verteilungsfunktion“  $\mu$  durch  $\xi = \frac{R}{A}$  ausdrücken:

$$(59) \quad \mu = \frac{1}{\sigma (\sigma^2 - 0,574)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2} (\xi^2 + 0,426)}.$$

Die Größe  $\xi$  ist die Tangente des Winkels  $\Theta$ , unter dem, vom Scheitel der Nadel  $E$  aus gesehen, der betreffende Punkt gegen den Fußpunkt verschoben erscheint; man kann daher Gl. (59) auch schreiben:

$$\mu = \frac{\cos^3 \Theta}{1 - 0,574 \cos^3 \Theta}$$

oder:

$$(60) \quad \lambda = \frac{\mu}{\mu_{\text{Scheitel}}} = 0,426 \frac{\cos^3 \Theta}{1 - 0,574 \cos^3 \Theta}.$$

Der Gesamtstrom innerhalb eines Kreises vom Radius  $R$  wird daher:

$$\begin{aligned} J &= \int_{\xi=0}^{\xi} 2R \pi j_S dR = A^2 \pi \int_0^{\xi} j_S d\xi^2 \\ &= \frac{Kv(v-v_0)}{2,76 A \lg \sqrt{\frac{1+\tau_E}{1-\tau_E}}} \int_0^{\xi} \frac{d\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2} (\xi^2 + 0,426)}. \end{aligned}$$

Das Integral hat den Wert (vgl. Fig. 4):

$$(61) \quad Q = \frac{1}{0,758} \lg 7,25 \frac{\sqrt{1+\xi^2} - 0,758}{\sqrt{1+\xi^2} + 0,758}$$

und, dehnt man die Integration bis  $\xi = \infty$  aus:

$$(62) \quad Q_{\infty} = 2,61.$$

$$(63) \quad J_{\infty} = \frac{0,95 K v (v - v_0)}{A \lg \sqrt{\frac{1+\tau_E}{1-\tau_E}}}.$$

Da  $\tau_E$  der reziproke Wert der Exzentrizität des Hyperboloides  $E$  ist, so gilt, wenn der Krümmungsradius  $\varrho$  seines Scheitels klein ist gegen den Abstand  $A$ :

$$\tau_E = 1 - \frac{\varrho}{2A}$$

und es ist dann:

$$\lg \frac{1+\tau_E}{1-\tau_E} = \lg \frac{4A}{\varrho};$$

$$(64) \quad J_{\infty} = \frac{0,95 K}{A \lg \frac{4A}{\varrho}} v (v - v_0).$$

Die experimentellen Untersuchungen Warburgs<sup>1)</sup> über den Spitzenstrom ergeben Resultate, die sowohl mit der Ver-

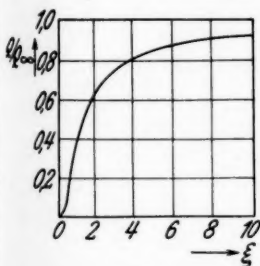


Fig. 4

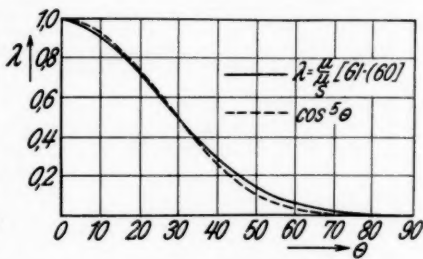


Fig. 5

teilungsformel Gl. (60), als auch mit Gl. (64) gut verträglich sind, jedenfalls besser, als man nach den in unserer Theorie gemachten Voraussetzungen erwarten könnte. Bei dem von Warburg im Handbuch der Physik<sup>1)</sup> beschriebenen Versuch war:  $A = 1$  cm;  $\varrho = 0,0117$  cm (Radius des zur Spitze aus-

1) E. Warburg, a. a. O. S. 154.

gezogenen Platindrahtes);  $v_0 = 2,88$  kV;  $v = 8$  kV. Es ergab sich ein Gesamtstrom von:

$$J = 2,66 \cdot 10^{-5} \text{ Amp.}$$

und eine Verteilung

$$\lambda'_i = \cos^{4,82} \Theta$$

für die positive und

$$\lambda = \cos^{4,65} \Theta$$

für die negative Spitzenentladung. Setzt man die Versuchswerte in Gl. (64) ein, so erhält man mit  $K = 450$ :

$$J = 2,24 \cdot 10^{-5} \text{ Amp.,}$$

und trägt man (Fig. 5) einmal  $\cos^5 \Theta$ , das andere Mal die rechte Seite von Gl. (60) als Funktion von  $\Theta$  auf, so sieht man, daß beide Größen im Intervall  $\Theta = 0$  bis  $\Theta = 30^\circ$  fast völlig, im Intervall  $30$  bis  $90^\circ$  mit gewisser Annäherung übereinstimmen; bei  $\Theta = 30^\circ$  ist exakt:  $\lambda = \cos^5 \Theta$ , bei  $\Theta = 60^\circ$  ist  $\lambda = \cos^4 \Theta$ . Die Kurve ist demnach in guter Übereinstimmung mit den Versuchswerten.

#### E. Anwendung

##### auf den von einer scharfen Kante ausgehenden Strom

Eine Halbebene  $E$  stehe senkrecht der Ebene  $S$  gegenüber und zwar so, daß ihr geradliniger Rand den Abstand  $A$  von der Ebene hat.

Da im Falle des logarithmischen Potentials die Größe:  $-\left|\frac{dw}{dz}\right|$  die Feldstärke im Punkte  $z$  ergibt, gleichgültig, ob die Potentialfunktion  $\varphi$  dabei als reeller oder als rein imaginärer Wert von  $w$  aufgefaßt wird, so geht Gl. (17) auch für den letzteren Fall ungeändert in Gl. (20) über.

Der rein imaginäre Teil  $\varphi$  der Funktion  $w$  von  $z$ , deren Umkehrung lautet:

$$(65) \quad z = A \cos w,$$

erfüllt die Bedingungen der vorliegenden Aufgabe, denn es ergeben sich die Koordinatenbeziehungen:

$$(66) \quad \begin{cases} x = A \cos \psi \cos \varphi, \\ y = A \sin \psi \sin \varphi. \end{cases}$$

denen als Äquipotentiallinien ( $\varphi = \text{const}$ ) Hyperbeln mit dem Fokalabstand  $A$  entsprechen; eine derselben ( $\varphi_E = 0$ ) entspricht der Halbebene  $E$ , die andere ( $\varphi_S = \frac{\pi}{2}$ ) der Ebene  $S$ ; das Potential erscheint hier also als Asymptotenwinkel der Hy-

perbeln. Die Kraftlinien sind Ellipsen mit dem gleichen Fokalabstand  $A$ ; sie schneiden die Grundebene in einem Abstand  $y_0$  vom Fußpunkt, der aus Gl. (66) für  $\varphi_s = \frac{\pi}{2}$  hervorgeht:

$$(67) \quad y_s = A \sin \psi.$$

$\sin \psi$  ist demnach, analog dem vorigen Beispiel, die Tangente des Scheitelwinkels  $\Theta$ :

$$(68) \quad \sin \psi = \operatorname{tg} \Theta.$$

Man findet:

$$\left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = \frac{A^2}{2} (\cos 2\psi - \cos 2\varphi)$$

und daher nach (20):

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{A^2}{2} \int_{\pi/2}^0 (\cos 2\psi - \cos 2\varphi) \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) d\varphi \\ &= \frac{A^2}{4} \left\{ \frac{\pi^2}{4} \cos 2\psi - 1 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Das ergibt gemäß Gl. (68):

$$(70) \quad L = \frac{A^2}{4} \left\{ \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) + \frac{\pi^2}{2} \operatorname{tg}^2 \Theta \right\}.$$

Es wird ferner die Feldstärke, wenn sie nicht auf die Spannung  $v_s - v_E = \frac{\pi}{2}$ , sondern allgemein auf die Spannung  $v$  bezogen wird:

$$F = - \left| \frac{dw}{dz} \right| = - \frac{2v}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{A \sqrt{\cos 2\psi - \cos 2\varphi}},$$

an der Ebene  $S$ :

$$(71) \quad F_s = - \frac{2v}{A\pi} \cos \Theta,$$

so daß man nach Gl. (15) erhält:

$$(72) \quad j_s = \frac{2K \cos \Theta}{\pi^2 A^3 \left\{ \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) + \frac{\pi^2}{2} \operatorname{tg}^2 \Theta \right\}} v (v - v_0).$$

Es ist ferner Gl. (67):

$$dy_s = A \frac{d\Theta}{\cos^3 \Theta},$$

und man findet daher als Gesamtstrom für die Längeneinheit:

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{\infty} &= 2 \int_0^{\pi/2} j_s dy_s = \frac{4Kv(v-v_0)}{\pi^2 A^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d \sin \Theta}{\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) \cos^2 \Theta + \frac{\pi^2}{2} \sin^2 \Theta} \\ &= \frac{4Kv(v-v_0)}{\pi^2 A^2 \sqrt{\frac{\pi^4}{16} - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\pi^2}{4} + 1}{\frac{\pi^2}{4} - 1} = 0,21 \frac{K}{A^2} v(v-v_0). \end{aligned} \right.$$

Ist die Beschaffenheit der Kante so, daß ihre Anfangsspannung derjenigen eines in derselben Entfernung  $A$  ausgespannten Drahtes vom Radius  $\varrho$  entspricht, so ist nach Gl. (42):

$$(74) \quad \frac{i_E}{J_{\infty}} = \frac{0,78}{0,21 \lg \frac{2A}{\varrho}}.$$

Für Drähte  $\varrho < \frac{1}{100} A$  ist also der vom Draht emittierte Strom ein Bruchteil des Kantenstromes.

Die Verteilungsfunktion ist hier

$$(75) \quad \lambda = \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) \frac{\cos \Theta}{\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) + \frac{\pi^2}{2} \operatorname{tg}^2 \Theta}.$$

Die Stromdichte fällt hier etwas rascher ab, als beim Spitzenstrom.

**F. Anwendung auf die Stromverteilung bei der Entladung eines zwischen zwei parallelen Platten ausgespannten dünnen Drahtes**

Die Abbildungsfunktion lautet in diesem Falle bekanntlich:

$$(76) \quad w = \frac{v_s}{\lg \frac{\pi \varrho}{4H}} \lg \frac{\pi}{4} \frac{\varrho}{H} \cotg i \frac{\pi}{4H} z,$$

wo  $2H$  die Plattendistanz und  $\varrho$  wieder den Drahtalbmesser bedeutet. Am Draht selbst wird  $\varphi = v_E = 0$ , während an den Platten  $\varphi = v_s = v$  ist.

Durch die Normierung

$$(77) \quad -2 \lg \frac{\pi}{4} \frac{\varrho}{H} = v$$

geht Gl. (76) über in

$$w = -2 \lg \frac{\pi \varrho}{4H} \cotg i \frac{\pi}{4H} z,$$

und man erhält (nach leichter Umformung)

$$(78) \quad F = - \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{\sqrt{8}\pi}{4H} \sqrt{\cos(\varphi - v) + \cos \psi}$$



und  $\left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = \frac{H^2}{2\pi^2} \frac{1}{\cos(\varphi - v) + \cos \psi}$ ,  
also, wenn noch  $\varphi - v = \Phi$  gesetzt wird nach Gl. (20):

$$(79) \quad L = \frac{H^2}{2\pi^2} \int_{\Phi=0}^{\Phi=v} \frac{\Phi d\Phi}{\cos \Phi + \cos \psi}.$$

Wir übergehen den leicht zu führenden Nachweis, daß auch hier für  $\varrho < \frac{1}{100} H$  die obere Grenze des Integrals erweitert werden kann:

$$(80) \quad L = \frac{H^2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\Phi d\Phi}{\cos \Phi + \cos \psi} = \frac{H^2}{2\pi^2 \lambda}.$$

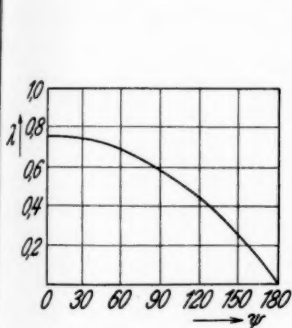


Fig. 6

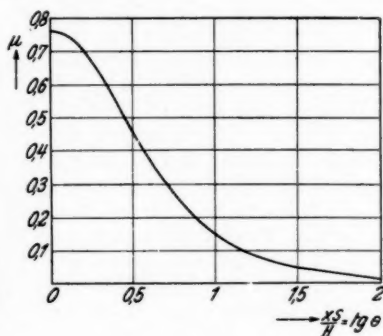


Fig. 7

Fig. 6 zeigt in graphischer Auswertung  $\lambda$  als Funktion von  $\psi$ .  
Aus Gl. (78) folgt ferner für  $\varphi = v_s = v$ :

$$F_s = \frac{\sqrt{8}\pi}{4H} \sqrt{1 + \cos \psi} = \frac{4\pi}{H} \cos \frac{\psi}{2}$$

oder nach (77):

$$(81) \quad F_s = \frac{2\pi v}{H \lg \frac{4H}{\pi \varrho}} \cos \frac{\psi}{2}.$$

In diesen Formeln ist  $\psi$  der imaginäre Bestandteil der normierten Abbildungsfunktion

$$\psi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi}{2H} x}{\sin \frac{\pi}{2H} y}.$$

Für  $y = H$  erhält man daraus den Zusammenhang zwischen den Abszissen  $x_s$  der Kraftlinienendpunkte auf der oberen Platte mit der Größe  $\psi$ . Dadurch wird es möglich, die Verteilungsfunktion [vgl. Gl. (81)]

$$(82) \quad \mu = \lambda \cos \frac{\psi}{2}$$

in Abhängigkeit von der Größe  $x_s/H$  aufzutragen (Fig. 7); man findet so durch graphische Integration:

$$(83) \quad \int_0^\infty \mu d \frac{x_s}{H} = \frac{1}{H} \int_0^\infty \mu dx_s = 0,5$$

und da nach Gl. (15), (80) und (81)

$$(84) \quad j_s = \frac{\pi^2 K \mu}{4 H^2 \lg \frac{4H}{\pi q}} v(v - v_0),$$

so ist der Gesamtstrom in allen vier Quadranten:

$$(85) \quad J_\infty = 4 \int_0^\infty j_s dx_s = \frac{K \pi^2}{8 H^2 \lg \frac{4H}{\pi q}} v(v - v_0) = \frac{1,23 K}{H^2 \lg \frac{4H}{\pi q}} v(v - v_0).$$

Vergleicht man dies mit Gl. (42), so erkennt man, daß durch Hinzufügung der zweiten Platte der Strom im Verhältnis:

$$\frac{1,23}{0,78} \frac{\lg 2 \frac{H}{q}}{\lg \frac{4}{\pi} \frac{H}{q}} \frac{v - v_{02}}{v - v_{01}}$$

größer geworden ist ( $v_{02}$ ,  $v_{01}$  Anfangsspannungen bei zwei Platten bzw. nur einer).

Für  $\frac{H}{q} = 100$  ist z. B. (ohne Berücksichtigung der Unterschiede zwischen den Anfangsspannungen) dieses Verhältnis 1,72.

Die Anfangsfeldstärke  $F_0$  ist wieder die gleiche, wie bei einer Platte [Gl. (44)] und es läßt sich leicht zeigen<sup>1)</sup>, daß die Anfangsspannung wird:

$$(86) \quad v_0 = F_0 q \lg \frac{4H}{\pi q}.$$

Sie ist demnach etwas niedriger, als im Falle nur einer Ebene.

1) Für kleine Werte von  $z$  ist

$$\left| \cotg i \frac{\pi}{4H} z \right| = \frac{4H}{\pi r};$$

führt man diesen Wert in die Potentialfunktion  $\varphi$  ein und differenziert  $\varphi$  nach  $r$ , so ergibt sich diese Beziehung.

### G. Graphische Interpretation der Größe $L$

Hat man die statische Lösung eines hierher gehörenden Problems in Form eines gezeichneten Kraftlinienbildes vor sich, so ist die Größe  $L$  [Gl. (17)] leicht daraus zu entnehmen. Es ist nämlich:

$$L = \int_{v_S}^{v_E} \frac{(\varphi - v_S) d\varphi}{F^2} = \int_{v_E}^{v_S} \frac{(\varphi - v_S) ds}{F} = \int_{v_S}^{v_E} (\varphi - v_S) \frac{(ds)^2}{d\varphi}.$$

Teilt man nun  $v = v_S - v_E$  in  $n$  gleiche Potentialschritte  $\delta$  und zählt ihre Anzahl von der Elektrode  $S$  aus, so ist  $\varphi - v_S = k\delta$ ; ersetzt man also das Integral durch eine Summe, so entspricht dem Differential  $d\varphi$  der Schritt  $\delta$ , dem Abstand  $h_k$  zweier Potentialflächen das Differential  $ds$  und man erhält:

$$(87) \quad L = \sum_{k=1}^n k \delta \frac{h_k^2}{\delta} = \sum_{k=1}^n k \cdot (h_k)^2.$$

Man hat also die aus dem Potentialbild abgegriffenen Abstände  $h_k$  zu quadrieren, mit ihrer Ordnungszahl zu multiplizieren und zu summieren, um für jede Krafttröhre die Größe  $L$  graphisch zu erhalten.

Es zeigt sich, daß dabei in vielen Fällen die Konvergenz nicht sehr groß ist; man teilt dann am besten die betreffende Krafttröhre in gewisse Intervalle, innerhalb deren man eine logarithmische oder Newtonsche Verteilung annehmen kann; bedeutet dann  $S_k$  die Länge der Kraftlinie bis zum Punkte  $k$ , so läßt sich leicht zeigen, daß man mit einer geringeren Gliederzahl  $n$  auskommen kann, wenn man die obige Rechenvorschrift dahin abändert, daß außer der Multiplikation mit der Ordnungszahl  $k$  im zylindrischen Teil noch mit  $\frac{S_k + S_{k-1}}{2} / S_k$ , im Newtonschen Teil mit  $\frac{S_k^2 + S_k S_{k-1} + S_{k-1}^2}{3} / S_k^2$  zu multiplizieren ist.

Da  $L$  bei Emissionselektroden von geringer Ausdehnung weitgehend von deren Gestalt und Größe unabhängig ist und bei einer Vergrößerung aller Dimensionen mit dem Quadrat der Vergrößerungszahl zunimmt, so genügt die Auswertung eines einzigen Kraftlinienbildes in den meisten Fällen für die erschöpfende Lösung der ganzen Aufgabe.

Ich habe in dieser Weise den Fall einer kleinen emittierenden Kugel gegen eine Ebene graphisch behandelt und es ergab sich auch hier, daß die Stromdichte  $j_s$  etwa mit  $\cos^5 \theta$  (vgl. S. 606) variiert.

### Zusammenfassung

Die Bedingungsgleichungen der unipolaren Ionenleitung lassen sich für geringe Raumladung allgemein angenähert lösen, wenn Richtungsänderungen der durch diese Raumladung modifizierten Feldstärken unberücksichtigt bleiben.

Bei der Anwendung dieser Theorie auf die hier durchgerechneten Beispiele: 1. Dünner emittierender Draht parallel zur Ebene. 2. Sprühende Kante einer Halbebene gegen die Ebene. 3. Spitzenentladung. 4. Dünner emittierender Draht inmitten zweier paralleler Ebenen, spielt ein Integralausdruck  $L$  eine Rolle, der auch graphisch einfach zu interpretieren und auszuwerten ist.

Die für den Spitzenstrom berechneten Resultate stimmen mit Meßwerten Warburgs überein.

Frankfurt a. M., Marienstr. 9.

(Eingegangen 10. Dezember 1932)

*Di  
Sa*

ist  
gefü  
sch  
loni  
koef  
koef  
Auf  
gebe  
Luft

und  
bzw  
der

sta  
hin  
mit  
fach  
wur  
(Sti  
gen  
mit  
zur  
der  
ver  
abs  
zur  
De  
Th  
and

10.  
tecl

**Die relative Ionisierung der Gase Luft, Stickstoff, Sauerstoff und Argon, gemessen mit der  $\text{Cu K}_\alpha$ -Linie**

**Von Otto Gaertner**

Von zwei hintereinander aufgestellten Druck-Ionisationskammern ist die erste mit dem zu untersuchenden Gase, die zweite mit Argon gefüllt. Gemessen wird die Ionisierung in beiden Kammern bei verschiedenen Drucken in der ersten Kammer. Das Verfahren ergibt die Ionisierung relativ zu Argon bzw. Volt pro Ionenpaar, den Schwächungskoeffizienten, den wahren Absorptions- bzw. den Streustrahlungskoeffizienten, wenn dieser nicht zu klein gegenüber dem MSK ist. Auf den bisher genauesten Wert von 28,8 Volt für Argon bezogen ergeben sich: für

Luft  $35,49 \pm 0,17$  Stickstoff  $39,31 \pm 0,20$  Sauerstoff  $32,95 \pm 0,22$  Volt

Inhaltsanordnung: 1. Theorie der Meßmethode. — 2. Apparatur und Versuchsbedingungen. — 3. Gang der Messungen. — 4. Messung bzw. Berechnung der Konstanten. — 5. Messungen. — 6. Diskussion der Messungen.

In früheren Untersuchungen über den gleichen Gegenstand<sup>1)</sup> wurde mit Strahlungsgemischen gearbeitet, weil nur diese hinreichend Energie und Querschnitt für eine Energiemessung mit der absoluten Thermosäule bieten. Der technischen Einfachheit halber sowie zur schnellen Gewinnung einer Übersicht wurde zunächst an sämtlichen in Frage kommenden Gasen (Stickstoff, Luft, Sauerstoff, Halogene, Edelgase, Methylhalogenide, Quecksilberdampf unveröffentlicht) die Ionisationsmessung mit einer Strahlung von derselben Energie ausgeführt, wie sie zur Absolutmessung mit der Thermosäule nötig war (Blende der Kammer am Orte der Thermosäule). Dieses Verfahren versagt jedoch, sobald die gestreute Strahlung gegenüber der absorbierten Strahlung keine Korrekturgröße mehr ist und man zur hinreichenden Absorption Drucke von einigen 10 Atm. braucht. Denn einerseits gibt es über die Streukoeffizienten viele Theorien und wenige direkte hinreichend genaue Messungen, andererseits betragen die Sättigungsspannungen unter den

1) O. Gaertner, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 94. 1929; 2. S. 325.1 1929; 10. S. 825. 1931; [5] 11. S. 648. 1931 (Druckfehlerberichtigung); Ztschr. techn. Physik 11. S. 363. 1930 (Angaben zur Thermosäule).

genannten Bedingungen einige 10 kV. Ihre Beherrschung bei elektrostatischen Messungen ist zwar möglich. Es wäre aber unzumutbar, durch die hohe Feldstärke eine weitere Unsicherheit in die Messungen zu bringen. Die Ionisierung bei hohen Drucken und Feldstärken stellt vielmehr ein Problem für sich dar, dessen Bearbeitung erst in den Anfängen steht. Es ist schon unerwünscht genug, wenn sich die Anwendung höherer Drucke bei kurzwelligen Röntgenstrahlen nicht umgehen läßt. Die möglicherweise vorhandenen Druckabhängigkeiten, etwa zwischen 1—100 Atm., sowie mehrere von anderen Autoren beobachtete Effekte bleiben hier absichtlich unberücksichtigt. Die vorliegende zweite Etappe in der Bearbeitung des Problems besteht vielmehr nur darin, daß mit spektral zerlegter Strahlung die Ionisierung der betreffenden Gase relativ zu derjenigen in einem hinreichend hochatomigen Gas gemessen wird. Nur für dieses wird dann noch die absolute Messung mit einem stark bzw. selektiv gefilterten Strahlungsgemisch durchgeführt. Man kann dann die Energie der spektral zerlegten Strahlung so weit herabsetzen, wie dies mit Rücksicht auf die Isolation, die ungewollte und die Höhenstrahlung zulässig ist. Durch diese Herabsetzung lassen sich zwar die Sättigungsspannungen in erträglichen Grenzen halten. Nichtsdestoweniger nahm die Bearbeitung dieser Seite des Problems die meiste Zeit in Anspruch. Von der raumbeanspruchenden Darlegung der Vorversuche bzw. Sättigungsmessungen ist hier abgesehen.

Für die Kupfer  $K_\alpha$ -Strahlung beträgt im Falle des Stickstoffes das Verhältnis von Streu- und Absorptionskoeffizient 0,027. Mit der zur Zeit erreichbaren Meßgenauigkeit ist es hier noch nicht möglich, aus den Verhältnissen der bei verschiedenen Gasdrucken absorbierten Energien den wahren Absorptionskoeffizienten zu bestimmen. Für die Silber  $K_\alpha$ -Strahlung beträgt dieses Verhältnis aber schon beim Sauerstoff rund 0,5.

### 1. Theorie der Meßmethode

Die Messung der Ionisierung relativ zu Argon bedarf keiner weiteren Theorie. Man könnte auch mit einer einzigen Kammer auskommen, indem man dieselbe zuerst mit Argon und dann mit dem zu untersuchenden Gase füllt. Einige naheliegende Überlegungen ergeben jedoch, daß dieses Verfahren gegenüber dem hier angewandten mit zwei Kammern im Nachteil ist. Bei letzterem kommt man mit einer einzigen Edelgasfüllung aus und erspart so das zeitraubende Auspumpen, was wegen des Unterschiedes im Atomgewicht sehr gründlich

vorgenommen werden muß. Ferner kommt man bei genaueren Messungen an einer jedesmaligen Kontrollmessung von Schwächungskoeffizienten der untersuchten Gase doch nicht vorbei, wofür man so wie so zwei Kammern nötig hat. Die gesuchte Größe ergibt sich aus folgender Formel:

$$V_x = \frac{C_2}{C_1} \cdot t_1 \cdot \left( \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_2} \right) \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4.$$

In dieser Formel bedeuten:

- $V$  Volt pro Ionenpaar für das zu untersuchende Gas,  
 $C_1$  und  $C_2$  Kapazität der ersten und zweiten Kammer. (Die erste dem Kristall zugewandt).  
 $t_1$  die Aufladezeit des Elektrometers der ersten Kammer.  
 $t_0$  die Aufladezeit des Elektrometers der zweiten Kammer, wenn die erste evakuiert.  
 $t_2$  die Aufladezeit des Elektrometers der zweiten Kammer, wenn die erste unter dem Drucke  $p$  steht.  
 $F_1$  Volt pro Ionenpaar für Argon.  
 $F_2$  Korrektur für Absorption der Strahlung beim Übergang von der ersten zur zweiten Kammer (Absorption im Celluloidfenster und Luftzwischenraum).  
 $F_3$  Korrektur für im Argon nicht absorbierte Strahlung.  
 $F_4$  Korrektur für in der ersten Kammer gestreute Strahlung.

Die Spannung an den Elektrometern geht nicht in die Formel ein, weil an beiden Kammern die Aufladezeit auf gleiches Potential gemessen wurde. Die hierfür erforderliche Abgleichung der Elektrometer ist zwar im allgemeinen verpönt. Sie ließ sich aber durch Verstellen der Schneiden mühelos erreichen. Für die Notierung und Auswertung der zahlreichen Messungen bedeutete sie eine erhebliche Vereinfachung.

Etwas verwickelter gestaltet sich die Berechnung des wahren Absorptionskoeffizienten aus dem Verhältnis der bei verschiedenen Gasdrucken absorbierten Energien. Es handelt sich um die Berechnung von  $\mu$  aus der Gleichung:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{1 - e^{-\mu p_1 d}}{1 - e^{-\mu p_2 d}}.$$

In der Formel bedeuten:  $i_1$  Strom in der ersten Kammer bei dem Drucke  $p_1$ ,  $d$  die Länge der Kammer in Zentimetern, der Index 2 bezieht sich selbstverständlich nicht auf die zweite Kammer, sondern auf die entsprechenden Größen bei einem anderen Druck in der ersten Kammer.

Man kommt mit der Reihenentwicklung von  $e$  auf eine verhältnismäßig einfache Lösung, wenn man sie bei dem dritten Gliede abbricht. Die obige Gleichung wird dann zu einer in bezug auf  $\mu$  quadratischen Gleichung. Die für die Annäherung zulässige Grenze für den Exponenten sowie ein Maß für die erreichte Genauigkeit ergibt sich durch Bildung der Differenz aus der Summe der fünf ersten bzw. drei ersten Glieder. Dieselbe ist im folgenden in Prozent der Summe bezeichnet.

Exponent	Differenz in %
0,30	0,38
0,25	0,021
0,20	0,0082

Es sei betont, daß 0,021 nicht 2,1 sondern 0,021% bedeutet. Überschreitet man den Wert 0,25 nicht, so liegt der durch die Näherung bedingte Fehler weit außerhalb der übrigen Meßfehler. Nach einigen elementaren Zwischenrechnungen ergibt sich aus obiger Formel folgende Gleichung für  $\mu$ , wobei  $\frac{i_1}{i_2} = k$  gesetzt ist:

$$\mu = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{kp_2^2 - p_1^2}{kp_2^3 - p_1^3} + \sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{(kp_2^2 - p_1^2)^2}{(kp_2^3 - p_1^3)^2} - \frac{6}{d^2} \cdot \frac{kp_2 - p_1}{kp_2^3 - p_1^3}}.$$

## 2. Apparatur und Versuchsbedingungen

Zur Kennzeichnung der Apparatur dürften die folgenden Angaben genügen:

Präzisions-Dreheisen Spannungsmesser von Abrahamson für die Primärspannung des Röntgentransformators.

Milliamperemeter von H. & B., Spezialausführung für Röntgenzwecke.

10-Ohm-Instrument von S. & H. zur Eichung der Elektrometer.

Zylinderkondensator nach Wulff (von Leybold), in der PTR geeicht, für die Kapazitätsmessung der Kammern bzw. Elektrometer.

2 Einfadenelektrometer mit Schneiden (nach Wulff) für die Messung der Ionenströme.

2 Präzisions-Manovakuummeter von Schaffer & Buddenberg.

Ausgewählter Kalkspatkristall von Steeg & Reutter.

Eine technische Glühkathodenröhre von C. H. F. Müller.

Eine 8-Volt-Batterie (100 Amp. Std. bei 10 Amp.) für Röhrenheizung.

Die wirksame Länge der in beiden Kammern durchstrahlten Luftschicht betrug 20,0 cm. Die dem Kristall zugewandte Kammer ist im folgenden kurz mit *I*, die andere mit *II* bezeichnet. Die Röhre war direkt an den Hochspannungstransformator angeschlossen. Sie wurde mit 17,5 mA und einer Maximalspannung von 19 kV betrieben. Zur Kontrolle der



spektralen Reinheit wurde der MSK für Aluminium gemessen. Dieses enthielt nach Angabe des Herstellers 0,3% Silizium, welches wegen seiner Nachbarschaft zum Aluminium keiner Berücksichtigung bedarf und 0,3% Eisen. Die Durchlässigkeit von  $76,0 \mu$  Aluminium betrug  $(36,00 \pm 0,062)\%$ . . . Ohne Korrektur für den Eisengehalt ergibt sich der MSK. zu 49,82. Nach Anbringung der Korrektur beträgt der MSK. 47,50. Allen<sup>1)</sup> gibt irrtümlicherweise an, daß die Korrektur für 0,4% Eisen bei 1% liege. Auch muß es auf Seite 913 dieser Arbeit in der Kolonne für Fe 295 statt 29,5 heißen.

### 3. Gang der Messungen

Zu Beginn und am Ende jeder Meßreihe, welche etwa eine Stunde dauerte, wurde die Isolation des Systems Elektrometer + Kammer geprüft, indem die Blende vor der Kammer mit Blei verdeckt, die Röntgenröhre eingeschaltet war und die Betriebsspannung an der Kammer lag. Das Elektrometer war auf den halben Wert der maximalen Aufladespannung geladen. Es ließ sich mühelos erreichen, daß die anzubringende Korrektur unter 0,1% lag. Ferner wurde der Einfluß des Ein- und Ausströmens der Gase auf die Isolation anfangs geprüft, weil sich hierbei je nach der Reinheit leitende Schichten auf den Isolatoren niederschlagen können. Die Messungen wurden erst eine Stunde nach dem Einschalten der Röhre begonnen, d. h. nachdem eine stationäre Temperatur in den Wicklungen der Instrumente und Transformatoren erreicht war.

Dann wurde Kammer I ausgepumpt und die Ionisierung in II gemessen ( $t_0$ ), I mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt und bei verschiedenen Drucken in I und II möglichst gleichzeitig die Ionisierung gemessen ( $t_1$  und  $t_2$ ), dann I wieder ausgepumpt, währenddessen die Elektrometerempfindlichkeit geprüft usw. Geregelt wurde nur die Röhrenspannung. Soweit eine Abnahme des Röhrenstromes infolge Abnehmens der Batteriespannung vorhanden war, erfolgte sie gleichmäßig mit der Zeit, weshalb der Röhrenstrom nicht geregelt wurde. Durch die beschriebene Reihenfolge der Messungen wird der Einfluß dieser Abnahme auf die Ergebnisse stark verringert. Zur Veranschaulichung des Gesagten diene die folgende Tabelle. Es handelt sich um die Messungen an Stickstoff<sup>2)</sup>, Reihe vom 22. 9.

1) S. J. M. Allen, Physic. Rev. 28. S. 907. 1926.

2) Man vergleiche die Bemerkung am Schlusse von 6 über eine nach Abschluß der Arbeit festgestellte Verunreinigung des Stickstoffes durch 1,2 Volum-Prozent Argon.

Beispiel für den Gang der Einzelmessungen  
Zahlen der ersten Reihe Druck in  $\text{kg/cm}^2$  absolut in  $I$

0,000 $t_0$		1,500		1,750		2,000		2,250	
		$t_1$	$t_2$	$t_1$	$t_2$	$t_1$	$t_2$	$t_1$	$t_2$
18,2	18,5	48,0	24,4	43,2	26,7	38,4	27,3	35,2	29,2
18,1	18,0	→ 48,4	24,6	→ 43,6	26,7	→ 39,0	27,8	→ 35,4	29,4 ↓
18,6	18,0	49,2	25,0	43,8	25,3	38,8	27,8	36,0	29,7
17,8	17,5	48,0	24,5	42,8	25,7	39,0	28,0	34,8	28,8
→ 17,4	17,4	47,4	24,1	42,6	26,3	37,8	27,5	35,6	29,2
17,7	17,5	48,6	24,3	42,8	25,8	38,6	28,4	35,0	28,7
17,6	17,8	47,4	24,6	44,6	26,6	39,4	28,2	35,6	28,8
17,1	17,6	48,6	24,9	43,2	26,7	38,2	27,3	35,8	29,5
17,6	17,4	49,4	25,2	42,6	26,3	39,0	27,7	35,2	29,0
17,6	17,8	—	—	—	—	—	—	—	—
17,7	17,7	—	—	—	—	—	—	—	—
17,8	17,8	—	—	—	—	—	—	—	—

Durch die Lücken zwischen den Reihen und die Pfeile dürfte die Reihenfolge der Einzelmessungen wohl genügend angedeutet sein. Von jedem Gas wurden 4 derartige Folgen von Messungen durchgeführt.

#### 4. Messung bzw. Berechnung der Konstanten

Es handelt sich um die Konstanten der in 1) für  $V_x$  angegebenen Gleichung.

**Kapazität:** Sie wurde durch Ladungsteilung nach der von Wulff angegebenen Abänderung ermittelt. Im folgenden sind die Mittelwerte aus je fünf Einzelmessungen angegeben, welche sowohl zu verschiedenen Zeiten, wie auch von verschiedenen Anfangsstellungen des Kondensators aus gemessen wurden. Die Kapazität ist in Einheiten der Teilung des Zylinderkondensators angegeben. Den Angaben der PTR. zufolge war innerhalb der Meßfehler von  $0,5 \cdot 10^{-12} F$  keine Abweichung von der Proportionalität der Skala feststellbar. Für die Gleichung ist nur das Verhältnis der Kapazitäten erforderlich; der Absolutwert ergibt sich durch Multiplikation der angegebenen Zahlen mit 2,95 in  $10^{-12} F$ . Um auch die Ionenströme in Ampere zu erhalten, sei angegeben, daß die unten gegebenen Aufladezeiten der Elektrometer für eine Spannung von 2,82 Volt gelten.

$C_1$	7,574	7,459	7,547	7,592	7,564	7,579	Mittel	7,558
$C_2$	6,026	6,027	6,061	6,019	5,969	6,018	Mittel	6,020.

**Absorption in den Fenstern und Luftzwischenraum:** Im Falle der Kupfer  $K_\alpha$ -Strahlung beträgt diese Absorption rund 50%, weshalb man dieser Messung eine größere Aufmerksamkeit

schenken muß. Zwar scheint es naheliegend, das hier verwendete, 0,30 mm starke Celluloid durch solches von geringerer Wandstärke zu ersetzen. Man muß jedoch einen Kompromiß mit zwei anderen Bedingungen schließen. Dünnes Material wölbt sich bei Unter- und Überdruck in einem mit der Dauer der Beanspruchung zunehmenden Maße, wodurch die Stärke in unkontrollierbarer Weise verändert wird. Zur Verringerung dieser Deformation kann man andererseits die Breite des Fensters nicht auf die annähernde Breite des Strahlenbündels beschränken. Denn dieses müßte nach Verlassen des Kristalles nacheinander einen Spalt und 4 Fenster in bis auf 0,1 mm vorgeschriebener Weise passieren.

Für die Justierung der schweren Druckkammern zusammen mit den Elektrometern bedeutet es aber eine wesentliche Vereinfachung, wenn durch die Breite der Fenster noch ein gewisser Spielraum für die Lage des Bündels zulässig ist. Die Absorption wurde auf zwei Wegen gemessen. Erstens in der üblichen Weise dadurch, daß eine doppelte Schicht des Zelluloids abwechselnd in den Strahlengang gebracht und die Ionisierung in *II* gemessen wurde. Als Mittel aus 26 Messungen ergab sich der Faktor  $F_2$  zu 1,876. Hierzu kommt noch die Luftabsorption einer Schicht von 3,5 cm Dicke, wodurch  $F_1 = 1,955$  wird.

Die zweite Methode ist in einer Hinsicht noch genauer, weil sie die Absorption an genau der Stelle des Fenstermaterials ergibt, an welcher auch bei der Messung das Bündel hindurchgeht. Da nämlich beide Kammern *I* und *II* gleiche Länge haben, muß bei gleicher Gasfüllung derselben die Ionisierung in beiden unter Berücksichtigung der Fenster- bzw. Luftabsorption gleich sein. Ist also die Luftabsorption bekannt, so kann man aus der gleichzeitig gemessenen Ionisierung in *I* und *II* die Fensterabsorption berechnen. Auf diesem Wege ergab sich als Mittel aus 82 Einzelmessungen  $F_2 = 1,950$ .

*Vom Argon durchgelassene Strahlung:* Wegen der starken Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Ordnungszahl ist es gerade beim Argon unzulässig, einen in der Literatur angegebenen Wert für genauere Messungen zu benutzen. Denn bis zu dem in Frage kommenden Reinheitsgrad ist Argon in größeren Mengen keine Handelsware von konstanter Zusammensetzung bezüglich der schwereren Edelgase. Das hier benutzte Gas enthielt nach Angabe der Hersteller 1% Stickstoff. Der Schwächungskoeffizient wurde gemessen, indem *I* zuerst evakuiert und dann mit Argon unter den Drucken 142, 182 und 245 mm gefüllt wurde. Für den Massenschwächungs-

koefizienten ergab sich 119,6, 120,1, 119,2. Daraus berechnet sich für die 20 cm lange Kammer mit einer Füllung von 407 mm Argon  $F_3 = 1,116$ .

In Kammer I gestreute Strahlung: Die pro Volumenelement gestreute Strahlung verhält sich zu der pro Volumenelement absorbierten Strahlung wie der Streukoeffizient zum Absorptionskoeffizient. In Anbetracht der geringen Korrektur kann man ohne weiteres den klassischen Wert 0,2 für den Massenstreu- koeffizienten einsetzen. Daraus ergibt sich der Faktor  $F_4$  für Stickstoff 1,027, Luft 1,021, Sauerstoff 1,017. Von der gestreuten Strahlung wird etwa 1% wieder in der Kammer absorbiert, ein zu vernachlässigender Betrag.

### 5. Messungen

Die vorhergegangenen Angaben erübrigen hier weitere Ausführungen zu dem Zahlenmaterial. Nur die Unterschiede in dem Werte von  $t_0$  bedürfen noch der Erklärung. Da die

Mittelwerte für die Aufladezeiten der Elektrometer in Sekunden, aus je 9 Einzelmessungen nach Beispiel unter 3). Fettgedruckte Zahlen bedeuten Gasdruck in Kammer I in kg/cm<sup>2</sup> absolut. Erste Kolonne Datum.

Die Buchstaben  $t$  beziehen sich auf alle drei Gase

#### Luft

	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_1$	$t_2$	$t_1$	$t_2$	$t_1$	$t_2$
	0,000	1,250		1,500		1,750		2,000	
14. 9.	46,58	125,8	61,90	109,4	66,20	97,02	70,00	87,11	74,29
15. 9.	44,43	120,5	59,63	104,3	63,49	91,74	66,75	83,14	70,59
17. 9.	25,70	69,96	34,77	61,11	36,49	54,22	39,12	49,00	41,28
29. 9.	21,20	56,17	28,77	48,53	30,23	43,25	31,87	39,23	33,92

#### Stickstoff<sup>1)</sup>

	0,000	1,500		1,750		2,000		2,250	
21. 9.	18,96	51,33	26,38	45,30	28,01	40,36	29,59	37,13	31,31
22. 9.	17,76	48,33	24,53	43,24	26,23	38,70	27,77	35,40	29,14
23. 9.	17,66	48,92	24,58	42,10	25,70	37,90	26,93	34,80	28,37
29. 9.	21,32	56,90	30,20	50,22	31,83	45,13	33,25	41,33	35,20

#### Sauerstoff

	0,000	1,000		1,250		1,500		1,750	
16. 9.	24,40	58,00	33,87	48,70	36,40	42,76	38,74	38,87	42,26
16. 9.	27,57	66,44	37,57	56,66	39,68	48,26	43,11	43,96	47,64
17. 9.	26,75	62,55	36,47	52,71	39,23	46,64	42,51	42,15	46,51
29. 9.	21,00	48,97	29,52	40,77	31,27	36,33	33,62	32,33	35,93

1) Man vergleiche die Bemerkung am Schlusse von 6 über eine nach Abschluß der Arbeit festgestellte Verunreinigung des Stickstoffes durch 1,2 Volum-Prozent Argon.

Röhre stets gleich belastet wurde, müßten diese Werte innerhalb der Meßfehler übereinstimmen. Die vorhandenen Unterschiede sind lediglich durch die Justierung der Röhre bedingt. Bei den Messungen stand die Apparatur fest und die Röhre wird relativ zum Spalt bewegt, bis das Maximum der Intensität erreicht ist. Im Verlaufe der Messungen stellte sich jedoch heraus, daß das anscheinend gefundene Maximum noch nicht erreicht war. Diese Stellung ergab sich mehr durch Zufall, weil die vorsichtige Einspannung der Röhre in Filz und der Zug der wenig nachgiebigen Druckschläuche für das Kühlwasser eine Fixierung bis auf Bruchteile eines Millimeters erschwerten.

Es sei betont, daß es sich hier um Meßreihen handelt, die ohne jede Störung verliefen, abgesehen von den kurzzeitigen Schwankungen der Netzspannung. Auch ist kein einziger Meßwert ausgelassen.

#### 6. Diskussion der Messungen

Aus den unter 5) angegebenen Zahlen ergeben sich nach der unter 1) angegebenen Formel für  $V_x$  folgende Werte für Volt pro Ionenpaar, wobei der zur Zeit genaueste Wert von 28,8 Volt für Argon eingesetzt wird:

Ergebnisse der Messungen in Volt pro Ionenpaar. Erste Kolonne Datum

Luft				
14. 9.	34,05	35,51	35,51	35,56
15. 9.	35,26	35,93	35,21	35,34
17. 9.	36,19	35,85	36,94	35,99
29. 9.	35,53	34,86	34,82	35,37
Stickstoff				
21. 9.	39,06	39,60	39,22	39,62
22. 9.	38,51	40,33	40,28	39,91
23. 9.	39,99	38,23	37,85	38,13
29. 9.	40,23	39,87	38,92	39,18
Sauerstoff				
16. 9.	33,71	33,41	32,93	34,16
16. 9.	32,58	31,87	32,05	34,13
17. 9.	31,66	31,84	32,83	33,99
29. 9.	34,16	32,37	32,96	32,48

Abgesehen von der letzten Kolonne bei dem Sauerstoff zeigen die Werte keine die Meßfehler übersteigende systematische Abweichung gegeneinander, sowohl von Kolonne zu Kolonne wie von Zeile zu Zeile. Der mittlere Fehler wurde

daher nur aus den 16 als gleichwertig<sup>1)</sup> angenommenen Mittelwerten und nicht aus den ursprünglichen 144 Einzelmessungen berechnet. Dies wäre sehr umständlich gewesen, weil sich jeder Voltwert aus drei voneinander unabhängigen Zeitmessungen ergibt. So ergeben sich folgende Werte, wobei die ersten Messungen aus dem Jahre 1929 zum Vergleich darunter gesetzt sind, ebenfalls auf 28,8 Volt für Argon umgerechnet (damals war 29,6 Volt angegeben).

	Luft in Volt	Stickstoff in Volt	Sauerstoff in Volt
1932	35,49 ± 0,17	39,31 ± 0,20	32,95 ± 0,22
1929	35,8 ± 3,1	40,1 ± 3,5	33,8 ± 2,9

Die vorliegende Übereinstimmung dürfte mehr ein Spiel des Zufalles sein. Eine Neubestimmung des Voltwertes für Argon wäre zwar erwünscht gewesen. Gerade bei diesem Gas sind aber die durch unzureichende Sättigung, Streuung und unvollständige Absorption bedingten Fehler am kleinsten. Augenblicklich hätte man für diese Messung das bereits neu justierte System von Röhre, Spektrometer und zwei Druckkammern abmontieren müssen.

Die oben angegebene Genauigkeit der Relativmessungen stellt noch nicht die durch die Methode bedingte Grenze dar, eine Steigerung um zwei Dezimalen ist noch erreichbar. Diese höhere Genauigkeit eröffnet auch neue Perspektiven. Denn die bisher vernachlässigten Abhängigkeiten des Voltwertes von Druck, Temperatur, Wellenlänge sowie der Einfluß von Fremdgasen ist dann quantitativ meßbar. Hieraus ergeben sich dann unter anderem Aufschlüsse über den Molekülbau bei höheren Drucken, ein Gebiet, das der Erforschung mit Kathodenstrahlen bedeutend schwerer zugänglich ist.

Zur Steigerung der Genauigkeit bieten sich noch folgende zwei Mittel. Erstens die Speisung des Röntgentransformators von einem mit Batteriestrom betriebenen Umformer bzw. Aggregat, statt wie bisher aus dem Lichtnetz. Daß gelegentlich schon eine Genauigkeit bis auf 0,01 Volt erreicht wurde, zeigen die Messungen der ersten Reihe unter Luft. Diese drei Werte stimmen auch bis auf 0,1 Volt mit dem Mittelwert überein. Eine zweite Verbesserung ist durch Fadenelektro-

1) Streng genommen steigt das Gewicht der Ergebnisse von Kolonne zu Kolonne etwa im Verhältnis 1:1,2, wovon zur Vermeidung von Weitläufigkeiten abgesehen wurde.

meter mit einer bei hohen Empfindlichkeiten hinreichend proportionalen Skala zu erreichen. Die Massenschwächungskoeffizienten, welche sich nebenbei aus den Messungen ergeben, sind insofern weniger von Interesse, als für 1,54 ÅE eine Anzahl von Beobachtungen vorliegt, denen man nichts hinzufügen kann. Ihre Berechnung aus den verschiedensten Kombinationen der Messungen gestattet dagegen eine Kontrolle der inneren Übereinstimmung sowie der Reinheit der Gase. Bei dieser Kontrolle ergab sich, daß der benutzte Stickstoff 1,2 Volum-Prozent Argon enthielt, welches beim Anschluß eines Reduzierventiles anscheinend in die kleine Stahlflasche von 1 Liter Wassereinhalte zurückdiffundiert ist. Der Stickstoff war ebenso wie der Sauerstoff mit besonders hohem Reingehalt von Höllriegelskreuth bezogen worden. Der Voltwert für Stickstoff wird jedoch durch das beigemengte Argon nicht in demselben Maße verändert wie der Schwächungskoeffizient. Maßgebend ist hier die Verteilung der primär erzeugten Photoelektronen auf die Ionisierung von Argon und Stickstoff. Legt man für die erste Näherung das Lenardsche Absorptionsgesetz zugrunde, so erhöht sich der Wert für Stickstoff von 39,31 auf 39,50 Volt.

Die unter 5) angegebenen Messungen bei vier verschiedenen Drucken lassen 10 Kombinationen zur Berechnung der Schwächungskoeffizienten zu. Ausgewertet wurden nur diejenigen, welche einem Druckunterschied von mindestens 0,75 kg/cm<sup>2</sup> abs. entsprachen. Bei kleineren Unterschieden gehen die Meßfehler zu stark in das Resultat ein.

Die Messungen von Allison sind mit der  $L_{\alpha}$ -Linie des Wolframs ausgeführt. Sie sind unter Annahme des Exponenten 3 von 1,473 ÅE auf 1,54 ÅE umgerechnet. Der MSK. für Aluminium wird durch 0,30 % Eisen von 47,50 auf 49,82 erhöht, welche Angabe zur Orientierung diene. Eine Trennung der beiden  $\alpha$ -Komponenten wurde hier noch nicht vorgekommen. Sie wird erst bei höherer Meßgenauigkeit der MSK. von Be-

Massenschwächungskoeffizienten, aus verschiedenen Kombinationen der Messungen berechnet. Erste Zeile Verhältnis der Gasdrucke in I, zweite Zeile Mittelwert aus je 36 Einzelmessungen

Luft				
0,000/1,250	0,000/1,500	0,000/1,750	0,000/2,000	1,250/2,000
9,80	9,71	9,66	9,63	9,42
Sauerstoff				
0,000/1,000	0,000/1,250	0,000/1,500	0,000/1,750	1,000/1,750
12,0	11,5	11,4	11,6	11,0



## Messungen anderer Beobachter

Beobachter	Luft	Stickstoff	Sauerstoff	Argon	Aluminium
Allen	—	—	—	—	48,5 (Korrektur unklar)
Jönsson	—	—	—	—	51,2
Crowther	9,49	—	11,1	—	—
Colvert	—	—	—	114,0	50,7 (mit 0,45% Fe)
Allison	9,47	—	—	96	50,2 (keine Angabe)
Spencer	9,54	—	11,6	112	—
Crowther	9,44	7,33	11,1	112,5	—
Verfasser	9,64	—	11,5	119,6	47,50 (korrigiert für Fe-Gehalt)

deutung. Allen<sup>2)</sup> weist in einem kurzen Sitzungsbericht auf neuere von ihm ausgeführte Messungen an leichtatomigen Elementen hin, wobei eine höhere Genauigkeit sowohl der Messungen als auch der chemischen Analysen erreicht wurde. Die ausführliche Veröffentlichung steht noch aus.

Die Gesellschaft für Lindes Eismaschinen stellte wieder in dankenswerter Weise die erforderliche Menge Argon zur Verfügung.

1) S. J. M. Allen, *Phys. Rev.* **28**. S. 907. 1926; E. Jönsson, *Dissertation* Upsala 1928; I. A. Crowther, *Phil. Mag.* **10**. S. 329. 1930; W. W. Colvert, *Phys. Rev.* **36**. S. 1619. 1930; S. K. Allison u. V. I. Andrew, *Phys. Rev.* **38**. S. 441. 1931; R. G. Spencer, *Phys. Rev.* **38**. S. 1932. 1931; J. A. Crowther, *Phil. Mag.* **13**. S. 505. 1932.

2) S. J. M. Allen, *Phys. Rev.* **37**. S. 456. 1931.

Bonn, Röntgenforschungsinstitut.

(Eingegangen 18. Dezember 1932)